Государственный комитет СССР по народному образованию

А. И. Савельев, И. Н. Фетисов

Обработка результатов измерений при проведении физического эксперимента

Методические указания к лабораторной работе М-1 по курсу «Общей физики»

Под редакцией С. П. Ерковича

Издательство МГТУ
1990

Аннотация

Савельева А.И., Фетисов И.Н. Обработка результатов измерения при проведении физического эксперимента: Методические указания к лабораторной работе **М-1** по курсу «Общая физика» / Под ред. С.П. Эрковича. — М.: Изд-во МГТУ, 1990. -32 с., ил.

ISBN 5–7038–0347–0

Изучаются погрешности измерений и методы обработки экспериментальных данных. Методические указания предназначены для студентов 1-го курса всех специальностей.

Таблиц — 13 , иллюстраций — 10, Библиографических названий — 6.

Рецензент Б.А. Розанов

Электронная версия документа подготовлена с помощью издательской системы LaTeX 2_ε.
PDF версия получена с помощью программы pdfTeX версии 0.14-f.
Перечисленные программные продукты являются свободными и распространяются бесплатно. Они входят в состав проекта MiKTeX. Официальный сайт проекта http://miktex.org

Гарнитура Computer Modern Roman. Для поготовки документа использованы кириллические PostScript шрифты (Type I), входящие в состав пакета cm-super 0.3.2 (ftp://vvv.vsu.ru)

Цель работы — ознакомление с погрешностями измерений и методами их оценки.

1 Погрешности измерения

Измерить физическую величину — значит опытным путём с помощью специальных технических средств определить её численное отношение к однородной ей величине, принятой за единицу.

Поскольку не существует абсолютно точных приборов и методов измерений, то результат измерения $x_{изм}$ в какой-то мере отличается от истинного значения x. Абсолютной погрешностью (ошибкой) измерения называют разность между измеренным и истинным значениями физической величины

$$\delta x = x_{изм} - x \tag{1}$$

В задачу измерения входит также оценка погрешности измерения, так как без этого нельзя судить о том, в какой мере достоверен полученный результат. Поскольку истинное значение обычно неизвестно, вычислить погрешность по (1), разумеется, нельзя. Погрешность определяют, исходя из точности измерительных приборов, разброса экспериментальных данных, методики измерения и т. д. В результате получают не δx, а её приближённое значение Δx, в котором неизвестен, как правило, даже знак.

Типичная форма представления результата измерения

$$x = x_{изм} \pm \Delta x \tag{2}$$

означает, что истинное значение с достаточно высокой вероятностью находится в интервале

$$x_{изм} - \Delta x < x < x_{изм} + \Delta x \tag{3}$$

Интервал (3) называется *доверительным*. Например, для ЭДС элемента получим $\mathcal{E} = (1.4 \pm 0.1)$ В, т. е. искомая величина заключена в доверительном интервале $1.3 \ldots 1.5$ В.

Относительная погрешность измерения — отношение абсолютной погрешности к измеряемой величине

$$\varepsilon = \frac{\delta x}{x} \approx \frac{\Delta x}{x_{изм}} \tag{4}$$

Относительную погрешность можно выразить также в процентах. Качество измерений, их точность удобно характеризовать именно относительной погрешностью. Например, скорость света $c = 299\,792\,459$ м/с измерена с абсолютной погрешностью $\Delta c = 1$ м/с или относительной погрешностью $\varepsilon = 3 \times 10^{-9} = 3 \times 10^{-7}\,\%$. Это очень высокая точность измерения. Если с такой же абсолютной погрешностью измерена малая скорость, например, $v = 10 \pm 1$ м/с, то $\varepsilon = 10\,\%$ — это весьма посредственная точность.

Без указания погрешности результаты измерений имеют малую ценность, что видно из следующего примера.

Пример 1. Испытания на прочность стальной проволоки сечением 1мм^2 показали, что разрыв происходит под действием силы $F_A = 1400$ Н для стали A и $F_B = 1300$ Н для B. Можно ли считать, что сталь A прочнее, чем B? На этот вопрос нельзя ответить обоснованно, не зная погрешностей измерения. Пусть они достаточно малы, например $\Delta F = 10$ Н. Тогда прочность стали A лежит в интервале $F_A = 1390 \ldots 1410$ Н, а стали B — $F_B = 1290 \ldots 1310$ Н. Сравнивая эти интервалы, видим, что с учётом погрешностей измерения $F_A > F_B$, т. е. сталь A прочнее. Иная ситуация возникает при больших погрешностях, например $\Delta F = 200$ Н. В этом случае, сравнивая интервалы $F_A = 1200 \ldots 1600$ Н и $F_B = 1100 \ldots 1500$ Н, видим, что они сильно перекрываются и поэтому не можем утверждать, что материалы отличаются по прочности.

Точность, с которой следует проводить измерения, должна быть согласована с целями измерений. Предположим, что в данном примере измерения проводились с целью выбора более прочной стали, тогда точность $\Delta F = 10$ Н достаточна и её дальнейшее повышение может привести к неоправданной трате времени и средств.

Из примера также видно, что, если мы ошиблись в оценке погрешности даже в 2 раза, т.е. считали её равной 5 или 20 Н вместо 10 Н, то это не мешает сделать правильный вывод о большей прочности стали A. Поэтому во многих случаях лучше дать хотя бы приближённую оценку погрешности, чем никакой.

Некоторые экспериментаторы сильно занижают погрешности, потому что недостаточно критически относятся к своей работе или хотят представить более «качественный» результат. Это совершенно недопустимо, так как ведёт к ошибочным выводам. Другая крайность состоит в произвольном увеличении погрешности в несколько раз (для запаса), что также не рекомендуется, так как обесценивает результаты хороших измерений.

Иногда при проведении эксперимента возникают *грубые погрешности — промахи*, являющиеся результатом низкой квалификации экспериментатора, его небрежности или неожиданных сильных воздействий на измерения. Промахи приводят обычно к очень большим погрешностям, и поэтому возможность их возникновения должна быть полностью исключена. Для этого следует соблюдать аккуратность и тщательность в проведении опыта, записях результатов. В дальнейшем будем считать, что промахи в рассматриваемых измерениях отсутствуют.

По характеру проявления погрешности подразделяют на *систематические* и *случайные*.

2 Систематические погрешности

Систематическая погрешность — это составляющая погрешности измерения, которая остается постоянной или закономерно изменяется при повторных измерениях одной и той же величины. Например, результаты измерения времени будут завышены, если часы спешат.

Причины, вызывающие систематические погрешности, детально исследуются в тех разделах физики или техники, в которых разрабатывается методика соответствующих измерений; там же определяются правила исключения из результатов измерения систематических погрешностей.

Систематические погрешности можно разделить на несколько групп.

1. Погрешности, природа которых известна и которые могут быть достаточно точно определены. В этой случае в результаты измерений можно внести поправку и тем самым исключить погрешность или существенно её уменьшить.

   Пример 2. Ток J и напряжение U на резисторе R измеряются по схеме (рис. 2). Принимая U равным показанию U_1 вольтметра (B), мы допускаем систематическую погрешность Jr, равную напряжению на сопротивлении r амперметра (A). Введя поправку Jr , получим правильное значение $U = U_1 - Jr$.

2. Погрешности известного происхождения, но неизвестной величины. Например, температура горячего тела измеряется по схеме (рис. 1).

Очевидно, что результаты измерения будут занижены, так как погрешность, зависящая от теплового контакта термометра с телом, трудно поддаётся оценке. Самое лучшее, что можно предложить в подобных случаях, — это изменить саму методику измерений, т.е. влияние воздуха на термометр надо уменьшить, как показано на рис. 1а, б.

Рис. 1. *Измерение температуры*

3. Погрешности, о существовании которых мы не подозреваем, хотя их величина может быть значительной. Например, в схеме на рис. 1 поверхность металла в клеммах a и b окислилась, и сопротивление контактов сильно возросло. В этом случае результат измерения напряжения на резисторе может оказаться неверным. Такого типа погрешности самые опасные, особенно при сложных измерениях и в мало изученных областях исследования.

Погрешности измерительных приборов в значительной степени также систематические; они будут рассмотрены ниже.

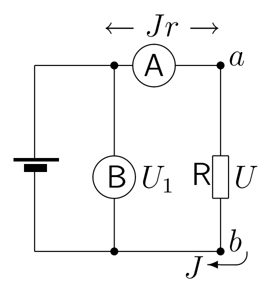

Рис. 2. *схема*

Из приведённых примеров видно, что систематические погрешности могут быть столь велики, что совершенно искажают результаты измерений. Поэтому учёт и исключение систематических погрешностей составляют важную часть экспериментальной работы. Необходимо очень тщательно продумывать методику измерений и подбирать приборы, проводить контрольные измерения, оценивать роль мешающих факторов и т. д. Один из способов убедиться в отсутствии систематических погрешностей — это повторить измерения другим методом и в других условиях. Совпадение полученных результатов служит некоторой гарантией их правильности.

3 Случайные погрешности

3.1 Вероятность случайного события

Случайными называются такие события, о появлении которых не может быть сделано точного предсказания. Например, выпадение тройки при бросании игральной кости, выигрыш в лотерее и т. д.

Хотя в таких случаях невозможно точное предсказание, можно указать вероятность появления того или иного результата. Поясним понятие вероятности на следующем примере. Пусть стрелок делает n прицельных выстрелов, из них m раз попадает в цель и $n-m$ раз промахивается. Тогда отношение m/n называется *частотой* попадания. При увеличении n частота стремится к некоторому пределу, который и есть вероятность попадания в цель. Результаты, полученные одним из стрелков, приведены в табл. 1. Из неё видно, что при малых n частота подвержена большим флуктуациям, а при больших n — стремится к некоторому пределу. Для данных условий стрельбы вероятность попадания в цель равна 0.66, если считать $n = 500$ достаточно большим.

Число выстрелов n	*Число попаданий* m	*Частота попадания* m/n
2	2	1
5	2	0.4
10	6	0.6
100	68	0.68
500	330	0.66

Таблица 1. *данные эксперимента*

Если некоторый эксперимент проводится n раз и m раз появляется событие A, то предел отношения m/n при увеличении n определяется как вероятность $P(A)$ события A. Вероятность может принимать значения $0 \le P \le 1$.

3.2 Характеристики случайных погрешностей. Погрешность единичного измерения

Случайная погрешность — это составляющая погрешности измерения, которая изменяется случайным образом при повторных измерениях одной и той же величины.

Пример 3. Для измерения периода колебаний маятника экспериментатор запускает секундомер, когда маятник достигает максимального отклонения, и останавливает его по прошествии одного полного колебания. Небольшая часть полученных данных представлена в табл. 2. Из неё видно, что результаты измерений отличаются друг от друга на несколько сотых или десятых долей секунды, т. е. содержат случайную погрешность. Погрешность отсчёта показания секундомера, непостоянство реакции экспериментатора, который нажимает кнопку секундомера то несколько раньше, чем нужно, то несколько позже, случайные воздушные потоки, которые влияют на движение маятника, — всё это вызывает разброс результатов измерений.

Результаты измерения периода маятника, с										
1.87	1.97	1.86	2.23	1.88	2.04	1.95	2.10	2.03	2.06	...

Таблица 2. *Результаты измерения периода маятника*

Случайные погрешности являются следствием многих причин, роль каждой из них незначительна и изменчива, поэтому исследовать каждую из причин, предусмотреть её влияние при данном измерении оказывается невозможным. Можно принять меры для уменьшения случайных погрешностей. Например, погрешность, обусловленную реакцией человека, можно уменьшить, если использовать автоматическое устройство для включения секундомера.

Случайные погрешности измерений являются случайными величинами и подчиняются определённым статистическим закономерностям, которые изучаются математической теорией погрешностей. Ниже мы приведём без доказательства некоторые выводы этой теории. Для иллюстрации основных положений теории будем использовать результаты 300 измерений периода маятника (см. пример 3 на стр. 7).

Изучение закономерностей, которым подчиняются случайные погрешности, можно сделать наглядными, если построить диаграмму, которая показывает, как часто получались те или иные результаты измерения. Такая диаграмма называется *гистограммой распределения результатов измерения.* Для этого разобьём весь диапазон полученных значений периода маятника на равные интервалы и подсчитаем, сколько раз результат измерения попал в каждый интервал.

На рис. 3 приведены гистограммы, построенные для различного числа n измерений. На гистограмме (рис. 3а) для $n = 5$ едва лишь намечается картина разброса результатов; на гистограмме (рис. 3б) для $n = 50$ уже проявляется определённая закономерность, которая становится ещё более отчётливой на рис. 3в для $n = 300$.

Допустим, что для некоторой физической величины X получено n независимых результатов измерений: $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Тогда в качестве наилучшего значения измеряемой величины следует взять их *среднее*, обозначаемое $\bar{x}$ или $\langle x \rangle$:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad (5)$$

Чем больше n, тем ближе среднее к неизвестному истинному значению X, т.е. $\bar{x} \to X$ при $n \to \infty$. Это справедливо только в том идеальном случае, когда систематические погрешности полностью исключены.

Среднее значение периода маятника для $n = 300$ соответствует $\bar{x} = 2.00$ с. Поскольку 300 это довольно большое число, то для некоторых дальнейших рассуждений и выводов можно приближённо принять, что истинное значение $X \approx \bar{x} = 2.00$ с. Перенесём (см. рис. 3в) начало координат в точку $X = 2.00$ с, тогда по оси абсцисс будут представлены не результаты измерения x_i, а их случайные погрешности: $x_i - X = x_i - 2.00$.

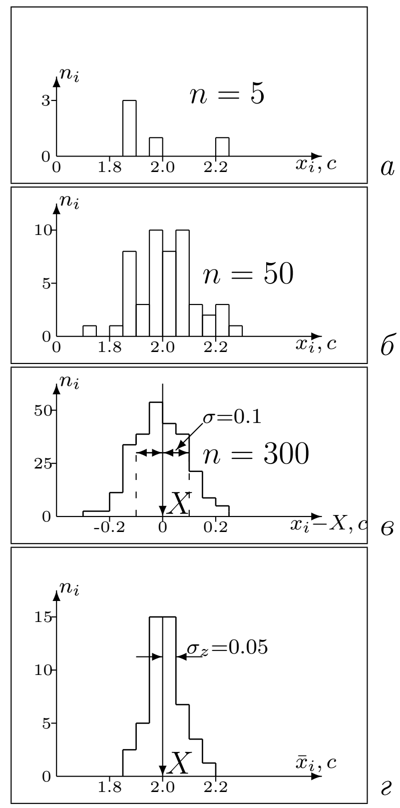

Рис. 3. *Число результатов измерений в интервале* 0.05*с*

Гистограммы, построенные по большому числу измерений, позволяют изучить закономерности, присущие случайным погрешностям. Рассмотрим их. Гистограмма на рис. 3в практически симметрична, имеет вид колокола, положение её максимума близко к X. Это означает, что случайные погрешности приблизительно с одинаковой частотой принимают как положительные, так и отрицательные значения; большие погрешности встречаются реже, чем малые.

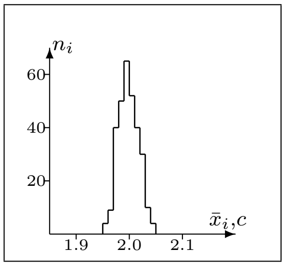

Рис. 4. *Число результатов в интервале 0.01с*

Ширина гистограммы, практически не зависящая от числа измерений, характеризует зону рассеяния результатов измерений, т.е. случайные погрешности единичных (отдельных) измерений. Она зависит от приборов, методов и условий измерений. Это видно из сравнения с гистограммой на рис. 4, полученной при измерениях периода того же маятника другим методом: секундомер запускался и останавливался электрическим сигналом от фотоэлемента, когда падающий на него луч перекрывался маятником. Гистограмма (рис. 4) также имеет вид колокола, но ширина её в 5 раз меньше, чем на рис. 3в.

Необходимо отметить следующее важное обстоятельство. Гистограммы распределения результатов измерения, полученные при измерениях физических величин, выполненных с помощью разнообразных приборов и методов, в большинстве случаев очень похожи по форме на гистограммы рис. 3в и 3в. Они различаются только шириной гистограммы и положением максимума, т.е. величиной X. Про такие распределения говорят, что они подчиняются закону Гаусса (распределение Гаусса или нормальное распределение). В теории погрешностей даётся математическое выражение для распределения Гаусса, которое будет приведено ниже.

Основной характеристикой случайной погрешности является средняя квадратическая погрешность. Необходимо чётко различать среднюю квадратическую погрешность σ для единичного (отдельного) измерения и среднюю квадратическую погрешность $\sigma_{\bar{x}}$ для среднего значения $\bar{x}$.

Средняя квадратическая погрешность единичного измерения вычисляется по результатам n измерений $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\ldots+(x_n-\bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}}\,, \qquad (6)$$

где $\bar{x}$ — среднее из n измерений.

Значение σ является основной характеристикой для определения точности данного способа измерений, оно характеризует ширину гистограммы распределения результатов измерения.

Иногда встречаются распределения результатов измерений, отличающиеся от нормального, например прямоугольные. Мы не будем рассматривать эти менее типичные случаи, поэтому и все дальнейшие выводы будут сделаны для нормального распределения.

Хотя величина σ характеризует случайную погрешность результата единичного измерения, выполненного данным методом, сама она может быть определена только из результатов достаточно большого числа измерений и тем точнее, чем больше n (на практике можно ограничиться значением $n = 10 \ldots 50$).

Вычислив σ (см. пример 3 на стр. 7) для $n = 300$, получим $\sigma = 0.10$ с. Отметим это значение на рис. 3а и подсчитаем частоту попадания результатов измерения в интервал

$$X - \sigma < x_i < X + \sigma \tag{7}$$

На гистограмме (см. рис. 3в) в интервал (7), т.е. $1.90 < x_i < 2.10$, попадает $m = 190$ измерений, следовательно, частота попадания равна $\frac{m}{n} = \frac{190}{300} = 0.63$. Увеличивая число измерений, мы всё более уточняем значения σ и частоты. В пределе при $n \to \infty$ теория даёт вероятность $P = m/n = 0.68$ того, что результат единичного измерения окажется в интервале (7). Другими словами, имеется 68 шансов из 100 за то, что результат какого-либо одного измерения отклонится от истинного значения не более чем на σ, и 32 шанса из 100 за то, что отклонение будет больше.

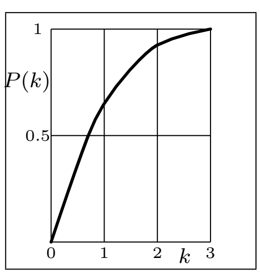

Рис. 5. $P(k)$

Для полноты описания случайной погрешности необходимо уметь указывать вероятность $P(k)$ попадания результата измерения x_i в интервал любой заданной полуширины Δx

$$X - \Delta x < x_i < X + \Delta x, \tag{8}$$

где Δx удобно выражать через σ и некоторый множитель k:

$$\Delta x = k\sigma \tag{9}$$

В табл. 3 и на рис. 5 приведены вычисленные теоретически значения $P(k)$. Вероятность $P(k)$ изменяется от 0 до 1 при изменении k от 0 до ∞. Однако уже при $k = 2$ вероятность $P(2) = 0.95$, а при $k = 3$ имеем $P(3) = 0.997$. Вероятность 0.997 означает, что из 1000 измерений в среднем 997 попадут в интервал от $X - 3\sigma$ до $X + 3\sigma$ и только три измерения будут иметь отклонение больше 3σ. Поэтому с некоторой долей условности величину $\Delta x = 3\sigma$ называют *предельной погрешностью измерения.*

Неравенство (8) можно записать в другом виде:

$$x_i - \Delta x < X < x_i + \Delta x$$

или

$$X = x_i \pm \Delta x$$

Эта запись имеет следующую важную интерпретацию. Произведя одно измерение некоторой величины и получив её значение x_i, можно утверждать, что искомое значение величины X находится в интервале от $x_i - \Delta x$ до $x_i + \Delta x$ с вероятностью $P(k)$. Интервал, в котором с заданной вероятностью P находится истинное значение измеряемой величины, называется *доверительным интервалом.* Соответствующая вероятность P — *доверительная вероятность* этого интервала. Полуширина доверительного интервала есть оценка погрешности результата измерения.

$k = \frac{\Delta x}{\sigma}$ *или* $k = \frac{\Delta \bar{x}}{\sigma_z}$	*Доверительная вероятность* $P(k)$
1	0.68
2	0.95
2.6	0.99
3	0.997

Таблица 3.

Примечание. Вероятность P иногда называют *надёжностью.*

Возвращаясь к примеру 3, можно указать погрешность $\Delta x = k\sigma$ единичного измерения для любой заданной вероятности: $\Delta x = 0.10$ с для $P = 0.68$ или $\Delta x = 2\sigma = 0.20$ для $P = 0.95$ и т.д. Результат однократного измерения (например первого в табл. 2) представим в виде:

$$X = x_1 \pm 2\sigma = 1.87 \pm 0.20c, \quad \text{для}\, P = 0.95\,.$$

У читателя может возникнуть вопрос: раз мы провели много измерений, чтобы оценить σ, зачем же указывать результат какого-либо единичного измерения, когда среднее значение $\bar{x}$, рассчитанное из многих измерений, ближе к истинному? Чтобы понять, зачем нужно знать σ, рассмотрим следующую ситуацию.

Пусть после того как измерили период маятника и получили $\bar{x} = 2.00$ с и $\sigma = 0.10$ с (см. пример 3 на стр. 7), мы выполним всего лишь одно измерение периода *другого* маятника и получим, например значение 2.52 с. Можно ли указать погрешность этого результата? Да, можно. Это измерение имеет ту же среднюю квадратическую погрешность $\sigma = 0.10$ с, поскольку оно произведено в тех же самых условиях: тем самым человеком, тем же методом, с помощью того же самого секундомера, и период второго маятника не слишком сильно отличается от периода первого. Итак, результат измерения периода второго маятника равен 2.52 ± 0.10 с для $P = 0.68$. Такие случаи, когда неизвестная величина измеряется всего лишь один раз, а случайные погрешности подобных измерений хорошо изучены (т.е. известно σ), часто встречаются на практике.

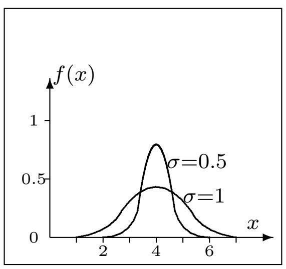

Рис. 6. *Распределение Гаусса*

Приведём математическое выражение для *распределения Гаусса* (нормального распределения)

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-X)^2}{2\sigma^2}}, \tag{10}$$

где X — истинное значение измеряемой величины; σ — средняя квадратическая погрешность, рассмотренная выше (σ^2 — *дисперсия*).

Функция $f(x)$, называемая плотностью распределения результатов измерения, имеет следующий смысл: $f(x)dx$ есть вероятность того, что отдельное случайно выбранное значение многократно измеряемой величины окажется в интервале от x до $x+dx$. В качестве примера на рис. 6 показаны две кривые нормального распределения для $X = 4$ при различных значениях параметра σ. Из рис. 6 видно, что при уменьшении σ кривая нормального распределения сжимается вдоль оси Ox и вытягивается вдоль оси $f(x)$. Результаты измерения группируются вокруг истинного значения X и тем теснее, чем меньше σ. Вероятность того, что результат измерения попадёт в доверительный интервал $(X - \Delta x, X + \Delta x)$,

$$P = \int\limits_{X-\Delta x}^{X+\Delta x} f(x)\,dx.$$

Значения этого интеграла для различных значений $\Delta x = k\sigma$ приведены на рис. 5 и в табл. 3.

3.3 Погрешность среднего значения

Случайную погрешность можно уменьшить, если провести не одно, а несколько измерений и в качестве результата измерения взять среднее значение $\bar{x}$. Изучая случайные погрешности единичных измерений, мы рассматривали большую совокупность однородных измерений. Поступим так же со средними, получив на опыте большое число различных средних значений одной и той же измеряемой величины. Пусть, например, выполнено четыре измерения периода маятника (см. табл. 2, первые 4 результата) и найдено их среднее значение $\bar{x}_1 = \frac{1}{4}(1.87 + 1.97 + 1.86 + 2.23) = 1.98\,\text{с}$. Выполнив ещё четыре измерения, получим несколько иное $\bar{x}_1 = 1.99\,\text{с}$. Проделав такую операцию достаточно большое число раз, можно построить гистограмму распределения средних значений $\bar{x}_i$ (см. рис. 3г). Сравнивая полученное распределение с распределением результатов единичных измерений на рис. 3в, видим, что оно такой же формы, т.е. нормальное, только более узкое. Средние значения меньше рассеяны относительно истинного X, так как при нахождении среднего складываются результаты, часть из которых больше X, а часть меньше.

Теория даёт следующую связь между средней квадратической погрешностью $\sigma_{\bar{x}}$ среднего значения, средней квадратической погрешностью единичного измерения σ и числом измерений n, использованных для вычисления среднего $\bar{x}$:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \tag{11}$$

В рассмотренном примере $n = 4$, $s = 0.10\,\text{с}$, тогда $\sigma_{\bar{x}} = \frac{0.10}{\sqrt{4}} = 0.05\,\text{с}$.

Соотношение (11) имеет большое значение в теории погрешностей. Во-первых, из него видна определяющая роль σ, от которой зависят погрешности не только единичного измерения, но и усреднённого результата. Во-вторых, (11) представляет собой закон уменьшения случайной погрешности при росте числа измерений. Например, желая уменьшить погрешность в 2 раза, мы должны сделать вместо одного четыре измерения; чтобы уменьшить погрешность в 3 раза — 9 измерений, а 100 измерений уменьшают погрешность результата в 10 раз. Этот путь уменьшения случайной погрешности часто используют на практике. При этом не следует забывать, что формула (11) справедлива только для случайной составляющей погрешности измерений. Систематическая погрешность, а также в значительной мере инструментальная погрешность не уменьшаются при росте числа измерений.

Вычисленное выше значение $\sigma_{\bar{x}} = 0.05\,$с отметим на рис. 3г и подсчитаем, сколько средних x_i попало в интервал $(X - \sigma_{\bar{x}}, X - \sigma_{\bar{x}})$, т.е. $1.95\ldots2.05\,$с. Как и следовало ожидать из свойств нормального распределения, в указанный интервал попало около 68% средних значений. Это означает, что с вероятностью $P = 0.68$ среднее $\bar{x}$ отклонится от X не более чем на $\sigma_{\bar{x}}$. Таким образом, всё сказанное о связи между доверительной вероятностью $P(k)$ и погрешностью $\Delta x = k\sigma$ единичного измерения справедливо и для погрешности $\Delta\bar{x}$ среднего. При этом нужно только заменить σ на $\sigma_{\bar{x}}$.

Если в качестве результата измерения берётся среднее $\bar{x}$ из n измерений, то

$$X = \bar{x} \pm \sigma \tag{12}$$

Причём полуширину доверительного интервала $\Delta\bar{x}$ (погрешность среднего) для заданной доверительной вероятности $P(k)$ можно определить следующим образом.

1. Предположим, что из большой серии каких-либо измерений значение σ известно; оно характеризует погрешность данного метода измерений. Тогда для новой серии подобных измерений погрешность среднего значения

   $$\Delta\bar{x} = k\sigma_{\bar{x}} = \frac{k\sigma}{\sqrt{n}}, \tag{13}$$

   где n — число проведённых измерений исследуемой величины.

2. Если значение σ неизвестно, но обрабатываемая серия измерений $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ достаточно велика (n больше $10\ldots20$), то σ и $\sigma_{\bar{x}}$ находятся из этой серии. Тогда

   $$\Delta\bar{x} = k\sigma_{\bar{x}} = \frac{k\sigma}{\sqrt{n}} = k\sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}, \tag{14}$$

3. Случай, когда значение σ неизвестно, но n мало ($n \lesssim 10$), будет рассмотрен в п. 3.4.

Таким образом, мы пришли к важному заключению: для характеристики случайной погрешности необходимо указать два числа — саму погрешность, т.е. полуширину доверительного интервала Δx или $\Delta\bar{x}$, и связанную с ней доверительную вероятность P. Согласно ГОСТ 8.207-76 в технических измерениях, как правило, $P = 0.95$. В физической научной литературе обычно принимают $P = 0.68$, т.е. указывают среднюю квадратическую погрешность.

3.4 Погрешность среднего, определяемая из малого числа измерений

На практике часто встречается случай, когда проводится небольшое число измерений ($n \approx 2 \ldots 10$). Для них вычисляется среднее и на основании только этих измерений оценивается погрешность среднего $\Delta\bar{x}$. В данном случае погрешности измерений заранее не изучались и значение σ неизвестно. Поэтому нельзя воспользоваться формулой (13), а формула (14) для малого числа измерений даёт плохие результаты. Погрешность $\Delta\bar{x}$ вычисленная по (14) для малого числа измерений, имеет другое значение доверительной вероятности, чем в табл. 3. В случае малого n правильная оценка погрешности основана на использовании так называемого распределения Стьюдента (t-распределения). В данном пособии мы не имеем возможности обсуждать этот вопрос подробнее, поэтому приведём правила для вычисления погрешностей.

По результатам n измерений ($n \geq 2$) вычисляем среднее $\bar{x}$ и полуширину доверительного интервала:

$$\Delta\bar{x} = t_{P,f}\sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}, \tag{15}$$

Это выражение отличается от (14) множителем перед радикалом. Вместо множителя k (функции доверительной вероятности P) используется множитель $t_{P,f}$, который является функцией не только P, но и числа измерений. Параметр f, называемый числом степеней свободы, в данном случае соответствует $f = n - 1$, где n — число измерений.

Значения $t_{P,f}$, рассчитанные по теории вероятностей, приведены в табл. 4 и на рис. 7.

Данный метод оценки погрешности среднего значения пригоден для любого числа измерений — как для малого, так и большого. При больших n он переходит в более простой метод (см. п. 3.3, формула (14)). Действительно, из рис. 7 и табл. 4 видно, что с возрастанием n значение $t_{P,f}$

$f = n - 1$	Значение коэффициента $t_{P,f}$			
	$P = 0.9$	$P = 0.95$	$P = 0.95$	$P = 0.957$
1	6.31	12.71	63.66	636.6
2	2.92	4.30	9.93	31.60
3	2.35	3.18	5.84	12.90
4	2.13	2.78	4.60	8.60
5	2.02	2.57	4.03	6.90
6	1.94	2.45	3.71	5.96
7	1.90	2.37	3.50	5.40
8	1.86	2.31	3.36	5.04
9	1.83	2.26	3.25	4.78
10	1.81	2.23	3.17	4.60
20	1.73	2.09	2.85	3.85
120	1.66	1.98	2.62	3.37
∞	1.65	1.96	2.58	3.29

Таблица 4. *Значение коэффициента* $t_{P,f}$

стремится к соответствующему значению k; например, $t_{P,f} \to 1.96 \simeq 2$ при $P = 0.95$. Отношение $\frac{t_{P,f}}{k} > 1$ растёт с уменьшением n и увеличением P.

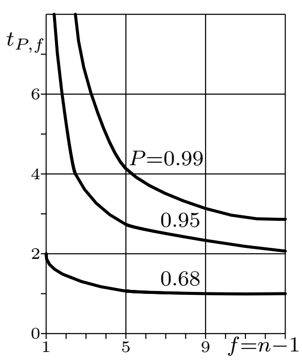

Рис. 7.

Расхождение в значениях $\Delta\bar{x}$, вычисленных по (15) и приближённой формуле (14), тем больше, чем меньше n. Например, для $P = 0.95$ расхождение составляет 6.5 раз при $n = 2$ и всего лишь 1.15 раза при $n = 10$. Расхождение в 1.15 раза (15%) при оценке погрешности измерения не является существенным. Поэтому на практике часто можно пользоваться формулой (14), если число измерений $n > 10$.

Пример 4. Обработаем результаты четырёх ($n = 4$) измерений периода маятника, взятых из табл. 2 и занесённых в первый столбец табл. 5. Среднее для них $\bar{x} = 1.98$ с. Полуширину доверительного интервала (погрешность среднего) вычислим по формуле (15).

$$\Delta\bar{x} = t_{P,f}\sqrt{\frac{0.089}{3 \cdot 4}} = t_{P,f} \cdot 0.086\,\text{с}$$

Задав доверительную вероятность $P = 0.95$, из табл.4 для $f = n - 1 = 3$, найдём $t_{P,f} = 3.18$. Тогда $\Delta\bar{x} = 3.18 \cdot 0.086 = 0.28$ с. Результат измерения $X = 1.98 \pm 0.28$ с. Округлив его по правилам, изложенным ниже, получим результат в окончательном виде $X = 2.0 \pm 0.3$ с, $P = 0.95$.

4 Инструментальная погрешность

Инструментальная погрешность измерения определяется погрешностью применяемых средств измерения, т.е. измерительных приборов и мер.

x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
1.87	-0.11	0.0121
1.97	-0.01	0.0001
1.86	-0.12	0.0144
2.23	$+0.25$	0.0625
		$\sum = 0.089$

Таблица 5. *Для примера 4*

Инструментальная погрешность, называемая иногда приборной погрешностью, обусловлена многими причинами, связанными с конструкцией прибора, качеством его изготовления и применяемых материалов, тщательностью регулировки, условиями применения и т.д. Инструментальная погрешность имеет как систематическую, так и случайную составляющие. Соотношение между ними может быть неодинаковым для различных приборов (указывается в паспорте прибора), однако чаще преобладает систематическая погрешность. Инструментальную погрешность можно установить при сравнении показаний данного прибора с показаниями более точного. В этом случае можно получить таблицу или график поправок, использование которых повышает точность прибора.

Для многих средств измерения широкого применения изготовители указывают, что инструментальная погрешность с достаточно большой вероятностью ($P \geq 0.95$) не превышает некоторого значения $\Delta_{инстр}$, называемого пределом допускаемой погрешности. Например, измерительная линейка длиной 1000 мм имеет $\Delta_{инстр} = \pm 0.20$ мм, т.е. изготовитель не гарантирует, что штрихи нанесены с большей точностью. Погрешности некоторых средств измерения приведены в табл. 6.

Связь между ценой деления шкалы и $\Delta_{инстр}$ строго не устанавливается. Например, для термометра ТЛ-2 в интервале 300 . . . 400 °C инструментальная погрешность в 4 раза больше цены деления, а для короткой линейки — в 10 раз меньше. Поэтому судить о точности прибора на основании цены деления шкалы можно только очень ориентировочно.

Средство измерения	Диапазон измерений	Предел допускаемой погрешности $\Delta_{инстр}$
Линейки металлические с ценой деления 1 мм	0 … 300 мм 0 … 1000 мм	±0.10 мм ±0.20 мм
Штангенциркуль с нониусом 0.05 мм	0 … 125 мм	±0.05 мм
Микрометр с ценой деления 0.01 мм	0 … 25 мм	±0.004 мм
Термометр ртутный стеклянный типа ТЛ-2 с ценой деления 1 °C	0 … 100 °C	±1 °C
	100 … 200 °C	±2 °C
	200 … 300 °C	±3 °C
	300 … 400 °C	±4 °C

Таблица 6. *Инструментальные погрешности некоторых приборов*

Точность измерений данным прибором, помимо инструментальной погрешности, ограничивается *погрешностью отсчёта* по шкале. Например, при проведении нескольких измерений отсчёт по линейке длиной 300 мм с делениями через 1 мм производят с округлением до ближайшего деления и получают одинаковые значения: 22.0 мм; 22.0 мм и т.д. В этом случае максимальная погрешность отсчета равна ±0.5 мм, она в 5 раз превышает $\Delta_{инстр} = 0.1$ мм. Результат измерения равен 22.0 ± 0.5 мм.

Приведём другой пример: показания термометра ТЛ-2 (табл. 6) также отсчитываются с округлением до ближайшего деления, погрешность отсчёта равна ±0.5 °C. В этом случае погрешность измерения почти полностью определяется инструментальной погрешностью, например $T = (347 \pm 4)\,°\mathrm{C}$.

4.1 Учёт инструментальной и случайной погрешностей

Суммарную среднюю квадратическую погрешность, обусловленную совместным действием инструментальной и случайной погрешностей, можно оценить по формуле

$$\sigma_{сумм} = \sqrt{\frac{1}{3}\Delta^2_{инстр} + \sigma^2} \qquad (16)$$

Если измерения выполнены несколько раз и в качестве результата взято среднее значение, то в (16) вместо σ надо подставить $\sigma_{\bar{x}}$.

В случаях, когда одна из этих составляющих преобладает над другой, можно пренебречь малой погрешностью. Согласно [4] случайная погрешность считается пренебрежимо малой, если $\Delta_{\textit{инстр}} > 8\sigma_x$ ($\Delta_{\textit{инстр}} > 8\sigma_{\bar{x}}$). Инструментальная погрешность считается пренебрежимо малой, если $\Delta_{\textit{инстр}} < 0.8\sigma_x$ или ($\Delta_{\textit{инстр}} < 0.8\sigma_{\bar{x}}$).

5 Погрешности косвенных измерений

Ранее рассматривались погрешности *прямых измерений*, когда физическая величина (время, напряжение и т.д.) измерялась непосредственно. Часто интересующая нас величина z непосредственно не измеряется и вместо неё мы производим измерения некоторых других величин x, y и т.д., а затем вычисляем z, которая является известной функцией указанных первичных величин

$$z = f(x, y, \ldots) \tag{17}$$

Такой способ измерения z называется косвенным. Например, измерив длины A и B сторон прямоугольника, определим его площадь $S = A \cdot B$ или периметр $p = 2(A + B)$. Если исходные переменные измерены несколько раз, то в (17) подставляем их средние значения $\bar{x}, \bar{y}, \ldots$ и получаем $\bar{z} = f(\bar{x}, \bar{y}, \ldots)$.

Рассмотрим несколько простых случаев нахождения погрешности косвенного измерения.

Первый случай. Пусть $z = f(x)$, т.е. z является функцией одной переменной. Если результат прямого измерения составляет $x = x_{\textit{изм}} \pm \Delta x$, то $z = f(x_{\textit{изм}})$, а погрешность косвенного

$$\Delta z = f(x_{\textit{изм}} + \Delta x) - f(x_{\textit{изм}}). \tag{18}$$

Например, измерив сторону квадрата $x = 100 \pm 1\,\text{мм}$, определим его площадь $S = x^2 = 10^4\,\text{мм}^2$ и погрешность $\Delta S = (x_{\textit{изм}} + \Delta x)^2 - x^2_{\textit{изм}} = 101^2 - 100^2 = 200\,\text{мм}^2$. Результат измерения $S = 10000 \pm 200\,\text{мм}^2$.

Обычно погрешность Δx мала и формулу (18) можно записать через производную функции $f(x)$, взятую в точке $x = x_{\textit{изм}}$. (рис. 8)

$$\Delta z = \frac{df}{dx}\Delta x \tag{19}$$

Для площади квадрата получим $\Delta S = \frac{df}{dx}\Delta x = 2x\Delta x = 200\,\text{мм}^2$. Величина ΔS представляет собой площадь заштрихованной полосы длиной $2x$ и шириной Δx (рис. 9).

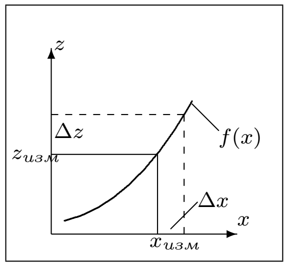

Рис. 8.

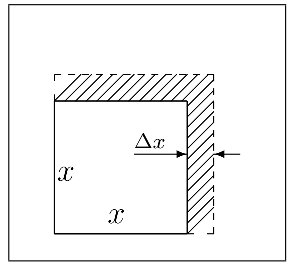

Рис. 9.

Отметим один важный случай, когда $z = x^m$, где m — любое число. По формуле 9 на странице 10 получаем $\Delta z = mx^{m-1}$ и $\frac{\Delta z}{z} = m\frac{\Delta x}{x}$, т.е. относительная погрешность величины z^m в m раз больше относительной погрешности величины x. Например, измерив радиус шара r, определим его объём $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Относительная погрешность измерения объёма $\frac{\Delta V}{V} = 3\frac{\Delta r}{r}$ в 3 раза больше, чем относительная погрешность радиуса.

Второй случай. Пусть измеряемая величина является суммой (или разностью) двух величин $z = x \pm y$. Средние квадратические погрешности обозначим Δx, Δy и Δz. Предположим, что величины x и y независимы, т.е. результат измерения y не зависит от результата измерения x. Этот случай имеет место, например, когда Δx и Δy — случайные погрешности. Тогда

$$(\Delta z)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2, \quad \Delta z = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \tag{20}$$

т.е. складываются не сами средние квадратические погрешности, а их квадраты (дисперсии). Погрешность, вычисленная по (20), меньше, чем $\Delta x + \Delta y$. Правило сложения (20) можно пояснить следующим образом: когда погрешность Δx положительна, погрешность Δy может быть как положительной, так и отрицательной.

Если z является суммой или разностью нескольких независимых величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то правило сложения погрешностей будет аналогично (20), т.е.

$$\Delta z = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + \ldots + (\Delta x_n)^2} \tag{21}$$

Из (21) следует важный вывод о роли каждой из погрешностей в общей погрешности результата. Пусть $z = x_1 + x_2$ — сумма двух величин, определённых с погрешностями $\Delta x_1 = 3$ и $\Delta x_2 = 1$. Тогда $\Delta z = \sqrt{3^2 + 1^2} = 3.16 = 1.05\Delta x_1$. Иначе говоря, если одна из погрешностей в 3 раза меньше другой, то общая погрешность возрастает за счёт этой меньшей погрешности всего на 5 %, что обычно играет малую роль. Этот вывод почти не изменится, если малых погрешностей не одна, а несколько, например $\Delta z = \sqrt{3^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2} = 3.6 = 1.2\Delta x_1$. Это означает, что если мы хотим повысить точность измерения величины Δz, то необходимо в первую очередь стремиться уменьшить ту погрешность, которая больше. В нашем примере это погрешность величины x_1.

Приведём *общее выражение для вычисления погрешности косвенного измерения*. Пусть $z = f(x, y, \dots)$ — функция нескольких независимых переменных $x, y, \dots$. Тогда

$$\Delta z = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y\right)^2 + \dots}\,, \tag{22}$$

где $\frac{\partial f}{\partial x}$ — производная по переменной x, взятая в точке $x = x_{изм}$; $\frac{\partial f}{\partial x}$ — производная по переменной y, взятая в точке $y = y_{изм}$; (и так по всем переменным); $\Delta z, \Delta x, \Delta y, \dots$ — средние квадратические погрешности; $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x\right)$ — составляющая погрешности измерения z, обусловленная погрешностью измерения x. Аналогичный смысл имеют и другие слагаемые в (22).

Формулы, полученные из (22) для некоторых частных случаев, приведены в табл. 7.

Функция	*Соотношения между погрешностями*
$z = x \pm y$	$\Delta z = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$
$z = xy, \quad z = \frac{x}{y}$	$\frac{\Delta z}{z} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2}$
$z = \ln x$	$\Delta z = \frac{\Delta x}{x}$
$z = e^x$	$\frac{\Delta z}{z} = \Delta x$

Таблица 7. *Вычисление косвенных погрешностей*

6 Правила округления результатов и погрешностей измерения

Погрешности измерений сами определяются с некоторой ошибкой. Эта «погрешность погрешности» обычно такова, что в окончательном результате *погрешность приводят всего с одной-двумя значащими цифрами.*

Правила округления чисел (результатов измерений) иллюстрируются (табл. 8) на примере округления до двух значащих цифр. (Обратите внимание на особенности округления цифры 5). Результат измерения принято округлять так, чтобы числовое значение результата оканчивалось цифрой того же разряда, что и значение погрешности.

До округления	*После округления*	*Пояснения*
734.7	730	$4 < 5$
736	740	$6 > 5$
735.0	740	3 — нечётное
745.0	740	4 — чётное
745.1	750	После 5 стоит не нуль

Таблица 8. *Правила округления*

Пример 5. Пусть получен результат измерений $l = 67132 \pm 4651$ м для $P = 0.95$. Запись в таком виде неприемлема, так как претендует на чрезмерную точность и лишена наглядности. Правильная запись: $l = (6.7 \pm 0.5) \cdot 10^4$ м, для $P = 0.95$.

7 Определение периода колебаний маятника (экспериментальная часть)

Цель эксперимента — на примере измерений периодов колебаний маятника, длина которого в процессе опыта изменяется, практически освоить методы обработки экспериментальных данных и оценки случайной погрешности измерения в различных типичных случаях.

7.1 Используемые приборы

В работе могут использоваться секундомеры различных типов.

Миллисекундомер Ф209. Принцип действия прибора основан на счете числа колебаний высокостабильного электронного генератора незатухающих колебания. Для того чтобы привести прибор в рабочее состояние, необходимо нажать кнопки *«сеть»*, *«режим работы I»*, *«контакт»*, *«разн.»*, *«вибрация»*. Кнопка на гибком шнуре служит для пуска секундомера. Сбросить показания можно, нажав кнопку *«сброс»*. Результаты измерений сразу округляют до сотых долей секунды, например 2146.2 мс – 2.15 с.

Стрелочный секундомер работает от электрического двигателя, питаемого сетевым напряжением. Отсчёт показаний производится с округлением до ближайшего деления, например 1.52 с. В некоторых случаях стрелка не устанавливается точно на нуль, что приводит к систематической погрешности. Если погрешность установки нуля больше 0.01 с, то необходимо ввести поправку в результаты измерений.

Инструментальная погрешность обоих секундомеров мала и её можно не учитывать в данных измерениях.

7.2 Выполнение измерений

Выполнить измерения с маятниками различных периодов (различной длины).

1. Установить такую длину маятника, чтобы его период колебаний был равен примерно $1.3 \ldots 1.6$ с. Пусть это будет маятник № 1.

2. Измерить период колебаний маятника. Для этого, отклонив маятник на малый угол от положения равновесия $10 \ldots 20\,^{\circ}$, отпустить его и по прошествии нескольких колебаний в момент прохождения маятником крайнего положения включить секундомер, остановить его при повторном прохождении маятником того же крайнего положения[1].

   Примечание. Для маятника с периодическим движением существует более точный метод: измеряется время t, за которое маятник совершает N полных колебаний, тогда период равен $\frac{t}{N}$. Однако в

[1] Рекомендуется следующее распределение работ: один студент управляет секундомером, другой студент считывает и записывает показания. Для сохранения неизменными условий измерения на протяжении всего опыта не следует меняться ролями.

работе мы сознательно этот метод не используем, так как на примере маятника хотим изучить погрешность обычных измерений, а не особенности измерений периодических процессов.

3. Указанные измерения периода маятника № 1 выполнить $n = 50$ раз. Полученные значения периода x_i занести в табл. 9.

4. Уменьшить длину маятника примерно на 5 мм. Это будет маятник № 2. Провести одно измерение периода, результат занести в табл. 10.

Маятник № 1			
i	x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
1			
2			
3			
$\vdots$			
49			
50			
	$\bar{x} =$		$\sum =$

Таблица 9.

i	x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
Маятник № 2			
1		—	—
Маятник № 3			
1			
2			
3			
4			
	$\bar{x} =$		$\sum =$

Таблица 10.

5. Ещё раз уменьшить приблизительно на 5 мм длину (это будет маятник № 3). Измерить четыре раза период колебаний, результаты занести в табл. 10.

6. Вновь уменьшить длину приблизительно на 5 мм (маятник № 4). Провести измерения, результаты записать в табл. 11.

7.3 Обработка результатов измерений

Для практического освоения методов обработки результатов измерений, изложенных в теоретической части пособия, выполнить следующие задания.

Задание А. Построить гистограммы для 50-ти измерений периода колебаний маятника № 1 (см. табл. 9). Построение поясним на следующем примере.

Маятник № 4			
i	x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
1			
2			
3			
$\vdots$			
12			
	$\bar{x} =$		$\sum =$

Таблица 11.

Пример 6. Пусть в опыте получены значения x_i в секундах: 1.38; 1.27; 1.36; 1.47; 1.32; 1.22. Диапазон полученных значений равен 1.22 . . . 1.47.

На миллиметровой бумаге по оси абсцисс (ось времени) отложить через равные интервалы значения x для всего диапазона. Рекомендуем отмечать x через интервал 0.05 с, начиная со значения, кратного 0.05 с. На оси абсцисс следует отметить значения 1.20, 1.25, 1.30, . . . 1.50 с.

Для построения гистограммы распределения результатов измерения нужно отложить на оси ординат число результатов, попавших в каждый интервал, следующим образом.

Ось ординат разметить так, чтобы одно деление соответствовало одному результату измерения. Взять первое значение x_i (см. пример 6 на стр. 25), определить, в какой интервал оси x оно попадает и построить в этом интервале прямоугольник высотой в одно деление. Затем повторить эту операцию для всех значений x_i. (На рис. 10 это проделано только для первых трёх значений).

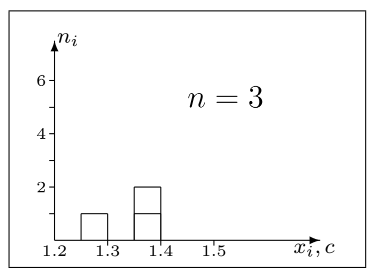

Рис. 10. *Число результатов в интервале* 0.01 *с*

Распределив таким образом все полученные в опыте значения x_i по интервалам, получим ступенчатую кривую — гистограмму распределения результатов и, следовательно, можем подсчитать, сколько раз результаты измерения попали в каждый интервал. Случаи, когда x_i равно граничному значению между двумя соседними интервалами, распределить поровну между этими интервалами. Примеры оформления гистограммы приведены на рис. 3 и 10.

Задание Б. Найти σ по результатам 50-ти измерений периода колебаний маятника № 1.

1. По формуле (5) вычислить среднее значение $\bar{x}$ для $n = 50$ и отложить его на оси абсцисс гистограммы.

   Примечание. Проекция на ось x центра тяжести ($ЦТ$) плоской фигуры, вырезанной по контуру гистограммы, совпадает с $\bar{x}$. На глаз можно довольно точно определить положение $ЦТ$ и тем самым заметить грубые ошибки вычисления $\bar{x}$ или построения гистограммы. В сомнительном случае следует повторить все вычисления.

2. Вычислить значения $x_i - \bar{x}$ и их квадраты, записать результаты в табл. 9.

3. По формуле (6) вычислить σ.

4. Заштриховать центральную часть гистограммы шириной 2σ (центр при $x = \bar{x}$). Подсчитать, какой процент результатов измерений попал в заштрихованную часть и сравнить его с теоретически ожидаемым для распределения Гаусса ($P = 0.68$).

5. Для среднего $\bar{x}$ из $n = 50$ измерений по формуле (11) вычислить $\sigma_{\bar{x}}$ найти полуширину доверительного интервала $\Delta\bar{x} = k\sigma_{\bar{x}}$ для доверительной вероятности $P = 0.95$, взяв значение k из табл. 3. После округления результат измерения представить в виде «$X = \bar{x} \pm \Delta\bar{x}$; для $P = 0.95$». Вычислить относительную погрешность $\varepsilon = \frac{\Delta\bar{x}}{\bar{x}} \cdot 100\%$.

Задание В. Оценить погрешности измерений по значению σ, найденному выше.

1. маятник № 2, $n = 1$. (См. табл. 10).

   а) Для доверительной вероятности $P = 0.95$ вычислить полуширину доверительного интервала случайной погрешности единичного измерения $\Delta x = k\sigma$, где k следует взять из табл. 3.

n	*результат измерения периода колебаний для* $\sigma = \ldots$	P	*Маятник*
1		0.95	№ 2
4		0.95	№ 3

Таблица 12.

b) Округлить и записать в табл. 12 результат единичного измерения периода колебания маятника № 2 в виде «$X = x \pm \Delta x$; для $P = 0.95$».

σ метода известно ($\sigma = \ldots$)

2. маятник № 3, $n = 4$ (см. табл. 10).

a) По формуле (5) вычислить среднее $\bar{x}$ для $n = 4$ (табл. 10).

b) По формуле (13) определить полуширину доверительного интервала для $P = 0.95$.

c) Результат измерения для $n = 4$ после округления представить в виде «$X = \bar{x} \pm \Delta\bar{x}$; для $P = 0.95$» и записать его в табл. 12.

Задание Г. Обработка результатов измерений и оценка погрешностей для случаев, когда σ заранее неизвестно. Выполняя данное задание, исходим из предположения, что значение σ ранее не определялось и погрешности измерений необходимо вычислить из четырёх результатов измерений для маятника № 3 и двенадцати результатов для маятника № 4.

1. случай малого числа измерений. Маятник № 3, $n = 4$.

   Методом, изложенным в пункте 3.4, обработать результаты четырёх измерений для маятника № 3.

a) По формуле (15) вычислить полуширину доверительного интервала $\Delta\bar{x}$ для $P = 0.95$. Значения $t_{P,f}$ для $P = 0.95$ и $f = n - 1 = 3$ взять из табл. 4.

b) Результат измерения для $n = 4$ после округления представить в виде «$X = \bar{x} \pm \Delta\bar{x}$; для $P = 0.95$» и записать в табл. 13.

<table>
<tr><th>Число измерений</th><th>n</th><th>Результат измерения периода маятника</th><th>P</th><th>Маятник</th></tr>
<tr><td>Малое</td><td>4</td><td></td><td>0.95</td><td>№ 3</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Большое</td><td rowspan="2">12</td><td></td><td>0.95</td><td rowspan="2">№ 4</td></tr>
<tr><td></td><td>0.68</td></tr>
</table>

Таблица 13.

2. случай большого числа измерений. Маятник № 4, $n = 12$.
   a) Вычислить среднее значение периода для $n = 12$ (маятник № 4).
   b) По формуле (14) определить полуширину доверительного интервала для $P = 0.95$ и $P = 0.68$, взяв значение k из табл. 3.
   c) Результат измерения для $n = 12$ после округления представить в виде «$X = \bar{x} \pm \Delta\bar{x}$; для $P = 0.95$» и «$X = \bar{x} \pm \Delta\bar{x}$; для $P = 0.68$» записать в табл. 13.

Задание Д. Проанализировать результаты эксперимента, в том числе:

1. изменение погрешности измерений в зависимости от n;
2. для маятника № 3 сравнить погрешности, найденные двумя способами.

7.4 Контрольные вопросы

1. Что называется абсолютной, относительной, систематической и случайной погрешностями измерений?
2. Что такое средняя квадратическая погрешность, доверительный интервал и доверительная вероятность?
3. Какими свойствами обладает нормальное распределение результатов измерений?
4. Как найти случайную погрешность среднего значения из результатов эксперимента?
5. Как найти погрешность косвенных измерений?

Список литературы

[1] *Зайдель А. Н.*
Ошибки измерений физических величин. — Л.: Наука. 1974.

[2] *Румшинский Л. З.*
Математическая обработка результатов эксперимента: Справочное пособие. — М.: Наука, 1971.

[3] *Сквайрс Дж.*
Практическая физика. — М.: Мир, 1971.

[4] ГОСТ 8.207–76.
Прямые измерения с многократными наблюдениями. Методы обработки результатов наблюдений.

[5] *Тейлор Дж.*
Введение в теорию ошибок. — М.: Мир, 1985.

[6] *Тойберт П.*
Оценка точности результатов измерений. — М.: Энергоатомиздат, 1988.

Список иллюстраций

Список таблиц

Содержание

Электронная версия документа подготовлена с помощью издательской системы LaTeX 2_ε.
PDF версия получена с помощью программы pdfTeX версии 0.14-f.
Перечисленные программные продукты являются свободными и распространяются бесплатно. Они входят в состав проекта MikTeX. Официальный сайт проекта http://miktex.org

Гарнитура Computer Modern Roman. Для поготовки документа использованы кириллические PostScript шрифты (Type I), входящие в состав пакета cm-super 0.3.2 (ftp://vvv.vsu.ru)