

МГТУ им. Н.Э. Баумана  
Гладков Н. А., Морозов А. Н.

## ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ.

Методические указания к лабораторной работе М-11 по курсу общей физики

Под ред. М. И. Киселева.  
МГТУ, 1990.

Рассматривается теория механических колебаний на примере механической системы с двумя степенями свободы и внутренней упругой связью. Дано описание экспериментальной установки, предназначенной для изучения свободных и вынужденных колебаний, методики выполнения на ней экспериментов.

Цель работы - изучение свободных и вынужденных колебаний механической системы (МС) с двумя степенями свободы и внутренней упругой связью. Определение амплитудно-частотных характеристик этой колебательной системы.

### ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Изучение основных закономерностей колебательного движения МС с двумя степенями свободы будем проводить на примере колебаний двух маятников, соединенных упругой связью. Условная схема такой колебательной системы приведена на рис. 1. Положение МС, состоящей из двух маятников, будет определяться двумя независимыми угловыми координатами  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ ,

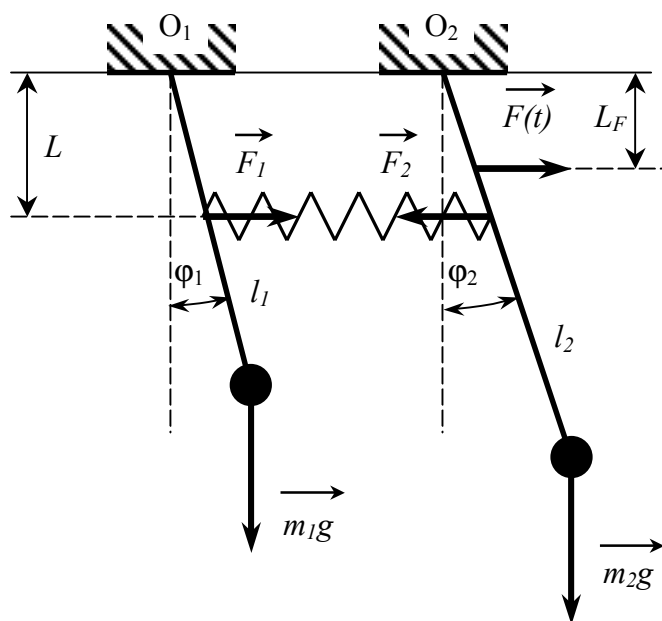


Рис. 1

характеризующими углы отклонения маятников от положения равновесия, т.е. такая МС имеет две степени свободы. В дальнейшем индексы «1» и «2» относятся к параметрам 1-го и 2-го маятников соответственно.

Маятники состоят из стержней и насаженных на них массивных тел массой  $m_1$  и  $m_2$ .

Поскольку массы стержней значительно меньше массы тел, то моменты инерции маятников относительно осей вращения  $O_1z_1$  и  $O_2z_2$ , проходящих через точки  $O_1$  и  $O_2$  и перпендикулярных плоскости чертежа, можно рассчитать по формулам  $J_1 = m_1 l_1^2$  и  $J_2 = m_2 l_2^2$ , где  $l_1$  и  $l_2$  - расстояния от центра масс тел до соответствующих осей  $O_1z_1$  и  $O_2z_2$ . На расстоянии  $L$  от осей вращения стержни скреплены пружиной. Внешнее гармоническое воздействие  $\vec{F}(t)$  может

быть приложено к одному из маятников. На рис. 1 сила приложена ко второму маятнику на расстоянии  $L_F$  от оси  $O_2z_2$  и приводит его в колебательное движение, которое через пружину передается первому маятнику.

### Свободные колебания связанных маятников.

Для вывода уравнений колебаний маятников используем основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси, например оси  $Oz$ :

$$J_z \varepsilon_z = \sum_{i=1}^N M_{iz} \quad (1)$$

где  $J_z$  - момент инерции тела относительно оси Oz;  $\varepsilon_z = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}$  - угловое ускорение тела;

$\sum_{i=1}^N M_{iz}$  - сумма моментов внешних сил относительно оси Oz, действующих на данное тело. При этом считаем, что стержни маятников можно рассматривать как невесомые. Тогда уравнение движения первого маятника в соответствии с выражением (1) примет следующий вид:

$$m_1 l_1^2 \ddot{\varphi}_1 = -m_1 g l_1 \sin \varphi_1 + F_1 L \cos \varphi_1 \quad (2)$$

где  $-m_1 g l_1 \sin \varphi_1 = M_{1z}$  - момент силы тяжести маятника. Знак «минус» указывает на то, что этот момент действует таким образом, что стремится вернуть маятник в положение равновесия.

Момент упругой силы  $F_1$ , действующий на маятник со стороны деформированной пружины, будет равен  $M_{2z} = F_1 L \cos \varphi_1$ . Упругая сила  $F = k \Delta x$ , где  $k$  - коэффициент жесткости пружины,  $\Delta x$  - изменение длины пружины. В соответствии с рис. 1 можно записать  $F_1 = kL (\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1)$ .

Поскольку масса и ускорения отдельных частей пружины невелики, то инерциальными свойствами пружины можно пренебречь, и, следовательно,  $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2|$ .

В данной работе рассматриваем малые колебания маятников, поэтому считаем, что  $\sin \varphi \approx \varphi$ ,  $\cos \varphi \approx 1$ . С учетом изложенного перепишем уравнение (2) в виде

$$m_1 l_1^2 \ddot{\varphi}_1 + m_1 g l_1 \varphi_1 - kL^2 (\varphi_2 - \varphi_1) = 0 \quad (3)$$

или

$$\ddot{\varphi}_1 + p_{11} \varphi_1 - p_{12} \varphi_2 = 0, \quad (4)$$

где коэффициенты  $p_{11}$  и  $p_{12}$  равны, соответственно:

$$p_{11} = \frac{g}{l_1} + \frac{kL^2}{m_1 l_1^2}; \quad p_{12} = \frac{kL^2}{m_1 l_1^2}.$$

Уравнения, аналогичные уравнениям (3), (4), можно составить и для второго маятника. Так, при условии, что внешняя сила  $\vec{F}(t) = \vec{0}$  (свободные колебания системы), имеем

$$\ddot{\varphi}_2 + p_{22} \varphi_2 - p_{21} \varphi_1 = 0 \quad (5)$$

где  $p_{22} = \frac{g}{l_2} + \frac{kL^2}{m_2 l_2^2}$ ;  $p_{21} = \frac{kL^2}{m_2 l_2^2}$ .

Таким образом, получена система двух линейных однородных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка для функций  $\varphi_1 = \varphi_1(t)$  и  $\varphi_2 = \varphi_2(t)$ .

Анализ системы уравнений (4) и (5) показывает, что свободные колебания двух соединенных упруго маятников характеризуются собственными круговыми частотами  $\omega_I$  и  $\omega_{II}$ , определяющими главные колебания системы. Эти частоты называются собственными, потому что зависят от параметров колебательной системы ( $l_1$ ,  $l_2$ ,  $L$ ,  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $k$ ) и не зависят от условий выведения системы из положения равновесия (начальных условий). Первое главное колебание системы описывается уравнениями  $\varphi_1 = A_1^I \cos(\omega_I t + \alpha_1)$ ,  $\varphi_2 = A_2^I \cos(\omega_I t + \alpha_1)$ . Аналогичную запись имеем и для второго главного колебания системы:  $\varphi_1 = A_1^{II} \cos(\omega_{II} t + \alpha_2)$ ,  $\varphi_2 = A_2^{II} \cos(\omega_{II} t + \alpha_2)$ .

Произвольные постоянные  $A_1^I$ ,  $A_2^I$ ,  $A_1^{II}$ ,  $A_2^{II}$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  определяют из начальных условий движения колебательной системы. Главные колебания возникают только при определенных начальных условиях. В случае произвольного возбуждения колебательной системы колебания ма-

ятников происходят на обеих главных частотах  $\omega_I$  и  $\omega_{II}$ . При этом колебания каждого маятника складываются из главных колебаний системы:

$$\varphi_1 = B_1 \cos(\omega_I t + \alpha_1) + D_1 \cos(\omega_{II} t + \alpha_2) \quad (6)$$

$$\varphi_2 = B_2 \cos(\omega_I t + \alpha_1) + D_2 \cos(\omega_{II} t + \alpha_2) \quad (7)$$

Поскольку функции  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  должны удовлетворять уравнениям (4) и (5), то коэффициенты  $B_1, B_2, D_1, D_2$  - взаимосвязаны. Например,

$$B_1 = \frac{p_{12}}{p_{11} - \omega_I^2} B_2; \quad D_1 = \frac{p_{12}}{p_{11} - \omega_{II}^2} D_2.$$

Параметры  $B_1, D_2, \alpha_1, \alpha_2$  (или  $D_1, B_2, \alpha_1, \alpha_2$ ) определяют из начальных условий колебательной системы. Зависимости (6) и (7) представляют собой общее решение системы уравнений (4), (5).

Все значительно упрощается, когда связанные маятники одинаковы, т.е.  $l_1 = l_2 = l$ ,  $m_1 = m_2 = m$ . В этом случае частоты первого и второго главных колебаний системы будут соответственно равны

$$\omega_I = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad (8)$$

$$\omega_{II} = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2kL^2}{ml^2}}. \quad (9)$$

Действительно, в этом случае  $p_{11} = p_{22}, p_{12} = p_{21}$ . Поэтому из уравнений (4) и (5) можно составить следующие комбинации:

$$(\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2) + \frac{g}{l}(\varphi_1 + \varphi_2) = 0,$$

$$(\ddot{\varphi}_1 - \ddot{\varphi}_2) + \left( \frac{g}{l} + \frac{2kL^2}{ml^2} \right) (\varphi_1 - \varphi_2) = 0.$$

Если рассмотреть эти уравнения относительно новых переменных  $\psi = \varphi_1 + \varphi_2$ ,  $\eta = \varphi_1 - \varphi_2$ , то получим

$$\ddot{\psi} + \omega_I^2 \psi = 0,$$

$$\ddot{\eta} + \omega_{II}^2 \eta = 0.$$

Последние уравнения описывают свободные гармонические колебания с круговыми частотами  $\omega_I$  и  $\omega_{II}$ .

Итак, в случае одинаковых маятников частота первого главного колебания соответствует синфазным колебаниям маятников, а частота второго главного колебания - антифазным (противофазным) колебаниям маятников.

Синфазные колебания могут быть получены, если пружина, связывающая маятники, не будет при их движении деформироваться. Это достигается тем, что оба маятника в начальный момент времени отклоняют в одну сторону на один и тот же угол и им сообщают равные начальные скорости. При последующем колебательном движении пружина остается недеформированной и не влияет на колебательный процесс. Частота этого колебания определяется формулой (8), т.е. совпадает с частотой математического маятника.

Противофазные колебания получаем, если в начальный момент времени маятники отклоняют в разные стороны, но на равные углы и им сообщают равные по величине, но противоположно направленные начальные скорости. В этом случае упругие силы со стороны пружины активно влияют на колебательный процесс, а следовательно,  $\omega_{II} > \omega_I$  [см. формулы (8) и (9)]. Если параметры колебательной системы подобраны так, что второе слагаемое под радикалом в формуле (9) будет много меньше первого, т.е.  $2kL^2 / (ml^2) \ll g/l$ , то в этом случае  $\omega_{II} \approx \omega_I$ .

Тогда при произвольном отклонении колебательной системы из положения равновесия (при произвольном возбуждении колебаний) будем наблюдать биения - колебания с периодически изменяющейся амплитудой (рис. 2).

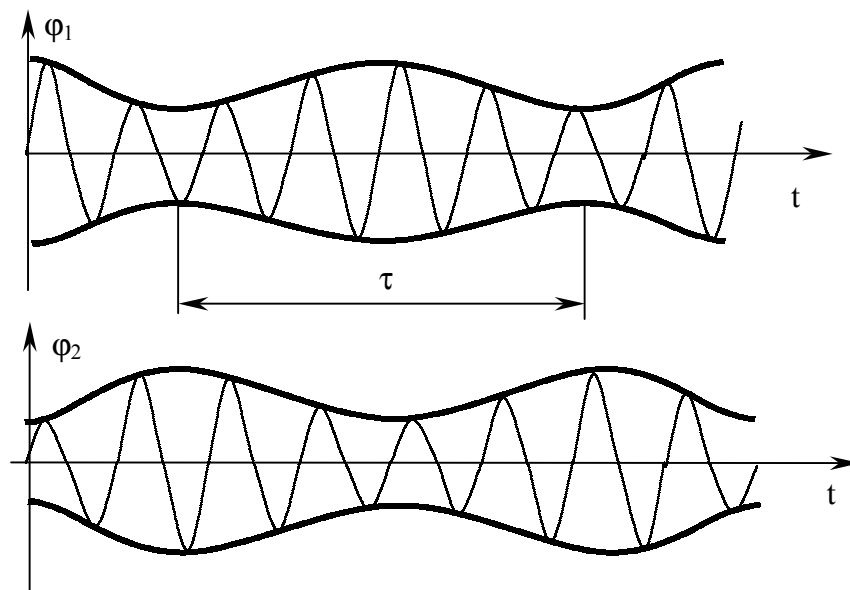


Рис. 2

Наиболее наглядно биения выражены в случае, если в начальный момент времени один из маятников отклонить, другой в это время придержать в положении равновесия, а затем оба маятника отпустить. В начале колебания первого маятника будут близки к свободным, но в дальнейшем под действием упругой пружины в колебательный процесс все в большей степени вовлекается второй маятник (рис. 3).

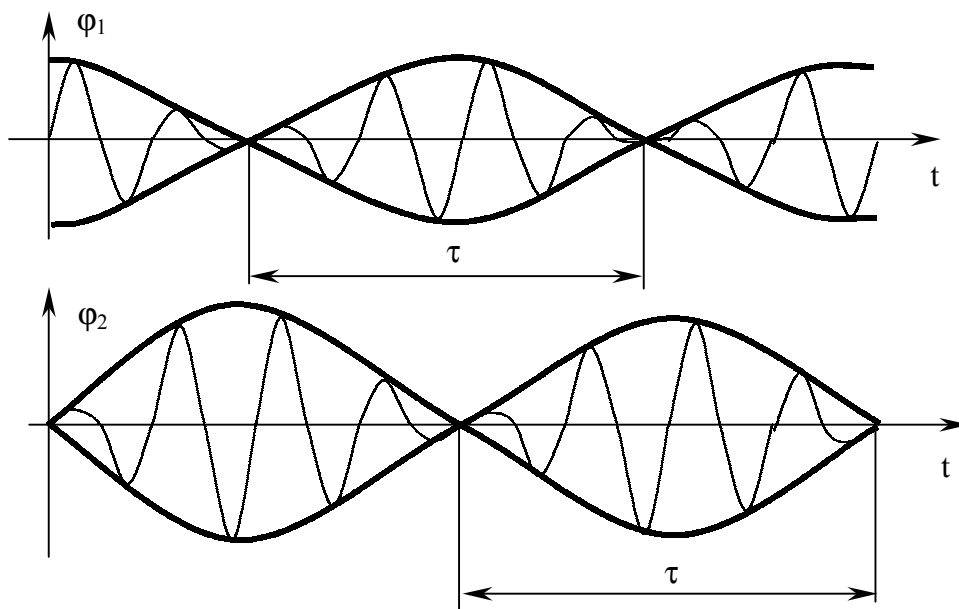


Рис. 3

Поскольку энергия маятниковой системы остается постоянной, то будет происходить последовательная перекачка энергии от одного маятника к другому. В то время, когда амплитуда одного из маятников будет максимальной, амплитуда другого маятника станет равна нулю.

Время  $\tau$  (рис. 3) определяет период биения. Период биения не зависит от способа возбу-

ждения колебаний (см. рис. 2, 3), поэтому для одной и той же маятниковой системы остается величиной постоянной:

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_{II} - \omega_I}. \quad (10)$$

Из формул (8), (9) вытекает следующее выражение:

$$\omega_{II}^2 - \omega_I^2 = 2 \frac{k}{m} \frac{L^2}{l^2}, \quad (11)$$

которое можно использовать, например, для определения по экспериментальным результатам коэффициента жесткости пружины  $k$ .

### Вынужденные колебания связанных маятников.

При действии на маятниковую систему внешней гармонической возмущающей силы  $F(t) = F_0 \sin \Omega t$ , где  $F_0$ ,  $\Omega$  - амплитуда и круговая частота возмущающей силы соответственно, возникают сложные колебания, которые образуются при наложении колебаний, имеющих собственные круговые частоты  $\omega_I$  и  $\omega_{II}$  и колебаний с частотой  $\Omega$ . При наличии сил трения после того, как колебания станут установившимися, маятники будут совершать колебания с частотой  $\Omega$ . Если трение в системе мало, то при частоте внешней возмущающей силы, близкой к одной из главных частот колебаний  $\omega_I$  или  $\omega_{II}$ , в системе наблюдается резонанс. В этом случае маятниковая система будет колебаться с наибольшей амплитудой  $A_\phi$  (рис. 4).

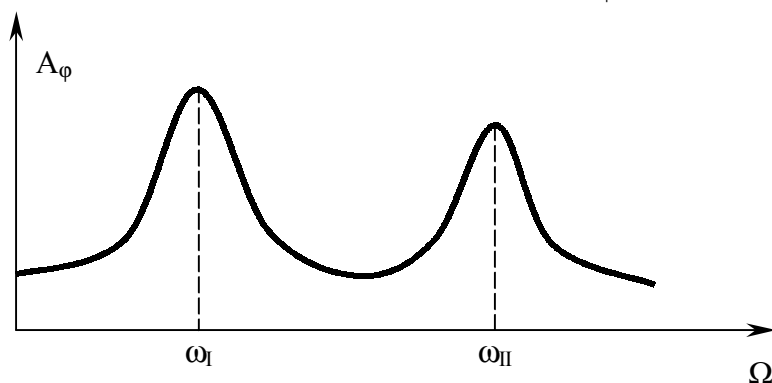


Рис. 4

### ОПИСАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ УСТАНОВКИ

Исследование свободных и вынужденных колебаний маятниковой системы будем проводить с помощью установки ФРМ - 13 (рис. 5). Основание 1 этой установки имеет регулируемые ножки, которые обеспечивают выравнивание прибора. С основанием соединена колонка 2, на которой закреплены втулка 3 и кронштейн 4. На стержне 5 втулки 3 нанизаны шарнирные узлы 6, соединенные со стержнем 9 и двумя маятниками, каждый из которых состоит из стержня 7 и массивной шайбы 8. Стержнем 9 через пружины 10 осуществляется возбуждение колебаний маятников. На стержни 7 нанесены риски с интервалом в 5 см. Маятники скреплены между собой при помощи двух пружин 11. Эти пружины вставлены в специальные С образные обоймы, которые можно перемещать вдоль стержней.

Возбуждение колебаний маятниковой системы производится следующим образом. На валу электродвигателя расположен приводной диск, соединенный со стержнем 9 так, что при вращении диска стержень приходит в колебательное движение и через пружины 10 передает колебания заднему маятнику, который в свою очередь через пружины 11 вовлекает в колебательный процесс передний маятник. Электродвигатель находится в блоке управления и измере-

ний 12. К кронштейну 4 прикреплена угловая шкала 13, позволяющая определять амплитуду колебаний маятников, а также фотоэлектрический датчик 14, предназначенный для измерения периода колебаний заднего маятника. Во время движения заднего маятника световой поток, ис-

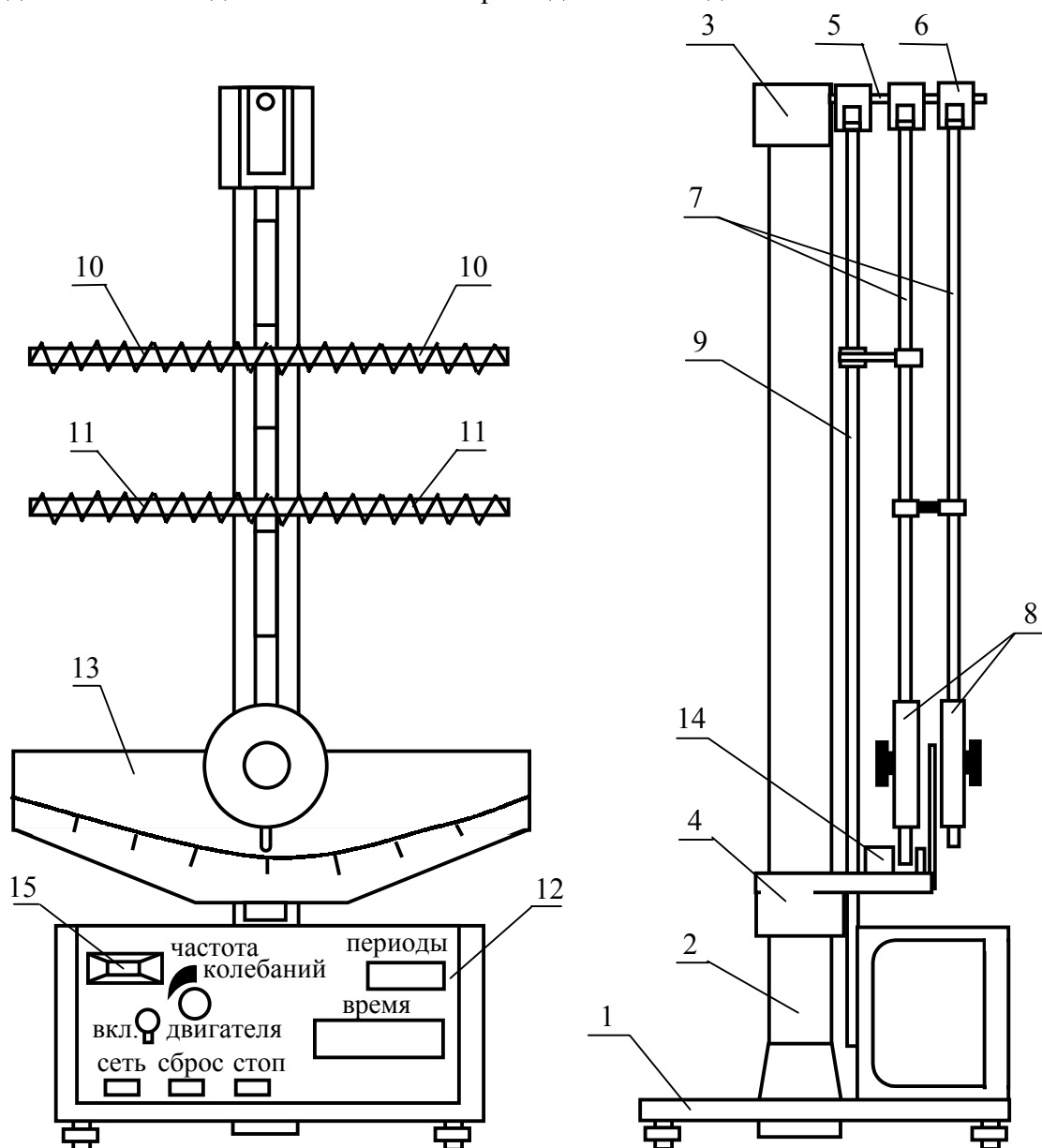


Рис. 5

пускаемый лампочкой на фототранзистор, прерывается, а в цепи фототранзистора генерируются электрические импульсы, которые после усиления передаются в миллисекундомер, расположенный в блоке управления и измерений 12.

Измеренные величины высвечиваются на цифровых индикаторах, обозначенных на лицевой панели как "ПЕРИОДЫ" и "ВРЕМЯ".

Система управления работой миллисекундомера состоит из клавишных переключателей "СБРОС", "СТОП", расположенных на лицевой панели прибора.

После включения установки ФРМ-13 в сеть и нажатия клавиши "СЕТЬ" миллисекундомер устанавливается в начальное положение. Готовность к работе миллисекундомера достигается нажатием клавиши "СБРОС". С этого момента начинается процесс счета импульсов, который продолжается до нажатия клавиши "СТОП".

На лицевой панели имеется тумблер "ВКЛ. ДВИГАТЕЛЯ" и ручка "ЧАСТОТА КОЛЕБАНИЙ". Вращение этой ручки, связанной с потенциометром, изменяет число оборотов

электродвигателя.

## ВЫПОЛНЕНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА

### А. Измерение характеристик синфазных и антифазных колебаний, биений.

1. Отсоедините пружины 10 (см. рис. 5) от заднего маятника.
2. Установите обойму, крепящую пружины 11, на расстоянии  $L = 15$  см, а шайбы 8 массой  $m=0,2$  кг на расстоянии  $l=45$  см от оси вращения. Расстояние  $l$  измеряется от оси вращения до центра  $l$  шайбы.
3. Включите установку ФРМ-13 в сеть и нажмите клавишу "СЕТЬ" на лицевой панели прибора.

#### Исследование свободных синфазных колебаний.

4. Отклоните оба маятника в одну сторону на одинаковый угол ( $\sim 8^\circ$ ) и отпустите их.
5. Измерьте период колебаний. Для этого нажмите клавишу "СБРОС". После того как маятники совершат 9 колебаний (число колебаний контролируйте по показаниям индикатора "ПЕРИОДЫ"), нажмите клавишу "СТОП". В этом случае измерение времени миллисекундометром автоматически прекратится после 10 колебаний маятников, а индикаторы "ВРЕМЯ" и "ПЕРИОДЫ" покажут соответственно время  $t_n$  десяти периодов колебаний и число периодов ( $n=10$ ).
6. Определите период и частоту синфазных колебаний по формулам

$$T_I^{\text{э}} = t_n / n, \quad \omega_I^{\text{э}} = 2\pi / T_I^{\text{э}}.$$

7. Найдите частоту синфазных колебаний по формуле (8).
8. Рассчитайте относительную погрешность определения частоты синфазных колебаний:

$$\varepsilon_{\omega_I} = \frac{|\omega_I - \omega_I^{\text{э}}|}{\omega_I} \cdot 100\%.$$

9. Результаты всех расчетов запишите в табл. 1.

Таблица 1

$t_n, \text{с}$	$T_I^{\text{э}}, \text{с}$	$\omega_I^{\text{э}}, \text{с}^{-1}$	$l, \text{м}$	$\omega_I, \text{с}^{-1}$	$\varepsilon, \%$

#### Исследование свободных антифазных колебаний.

10. Отклоните маятники в разные стороны на равные углы ( $\sim 8^\circ$ ) и отпустите их.
11. Определите период  $T_{II}^{\text{э}}$ , и частоту  $\omega_{II}^{\text{э}}$  антифазных колебаний по методике, изложенной в пп. 5, 6.
12. Найдите частоту антифазных колебаний по формуле (9). Суммарный коэффициент жесткости двух пружин 11 равен  $k=16,6$  Н/м.
13. Рассчитайте относительную погрешность частоты антифазных колебаний по формуле

$$\varepsilon_{\omega_{II}} = \frac{|\omega_{II} - \omega_{II}^{\text{э}}|}{\omega_{II}} \cdot 100\%$$

14. Результаты всех расчетов запишите в табл. 2.

Таблица 2

$t_n, \text{с}$	$T_{II}^{\text{э}}, \text{с}$	$\omega_{II}^{\text{э}}, \text{с}^{-1}$	$l, \text{м}$	$\omega_{II}, \text{с}^{-1}$	$\varepsilon, \%$





	0,2								
0,2	0,1								
	0,15								
	0,2								

4. Установите С образную обойму на расстоянии  $L=15$  см, а затем  $L=20$  см и проведите измерения в соответствии с п. 3 этого задания.

5. Установите на маятниках шайбы 9 сначала массой  $m=150$  г, а затем  $m=100$  г на расстояние  $l=45$  см и повторите опыты в соответствии с пп. 2, 3, 4 этого задания.

6. Результаты экспериментов нанесите на миллиметровую бумагу в виде функциональной зависимости  $\omega_{II}^2 - \omega_I^2 = f\left(\frac{2L^2}{ml^2}\right)$  (рис. 6).

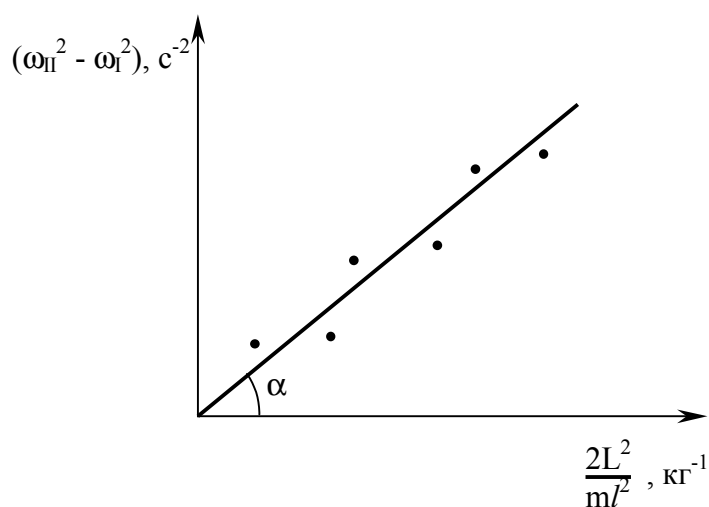


Рис. 6

7. Аппроксимируйте экспериментальные точки прямой линией. Тогда, согласно формуле (11),  $\operatorname{tg} \alpha$  (см. рис. 6) будет определять коэффициент суммарной жесткости пружин 11, т.е.  $\operatorname{tg} \alpha \approx k_{\Sigma}$ . Сравните полученное значение  $k_{\Sigma}$  с заданным  $k_{\Sigma}=16,6$  Н/м и определите относительную погрешность по формуле  $\varepsilon_k = \frac{|k_{\Sigma} - k|}{k} \cdot 100\%$ . Результаты занесите в табл. 4.

### С. Построение амплитудно-частотной характеристики вынужденных колебаний.

1. Установите на маятниках шайбы массой  $m=200$  г на расстоянии  $l=45$  см от оси вращения.
2. Установите С образную скобу с пружинами 11 на расстоянии  $L=150$  мм от оси вращения.
3. Присоедините пружины 10 к заднему маятнику.
4. Включите тумблер "ВКЛ. ДВИГАТЕЛЯ". При этом должна загореться лампочка 15 (см. рис. 5).
5. Плавно вращая ручку "ЧАСТОТА КОЛЕБАНИЙ" проведите измерения амплитуды и частоты колебаний. Для определения периода колебаний используйте методику, изложенную в пп. 5, 6 задания А. Амплитуду колебаний измеряйте визуально, фиксируя угол отклонения маятника от вертикали по шкале 13 (см. рис. 5).
6. Повторите измерения амплитуды и частоты колебаний для 10 - 15 различных значений частот  $\Omega$  (для 10 - 15 различных значений числа оборотов электродвигателя). Результаты измерений запишите в табл. 5.

Таблица 5

Номер измерения	$T, c$	$\omega, c^{-1}$	$A_{\phi}, ^{\circ}$
1 2 . . . 15	$L=150 \text{ мм}$		
1 2 . . . 15	$L=175 \text{ мм}$		

**Примечания.** Поворот ручки "ЧАСТОТА КОЛЕБАНИЙ" осуществлять каждый раз на  $\sim 20^{\circ}$ . После каждого поворота необходимо выждать  $\sim 40$  с для того, чтобы колебания маятников стали установившимися и частота внешней силы  $\Omega$  совпала с частотой колебаний маятников  $\omega$ .

Помните, что область резонансных частот очень узкая, поэтому вблизи резонансной частоты изменяйте число оборотов двигателя на очень малую величину (поворачивайте ручку "ЧАСТОТА КОЛЕБАНИЙ" на угол  $\sim 5^{\circ}$ ). Основные экспериментальные точки должны быть получены вблизи резонансных частот.

#### **Обратите внимание!**

Если при увеличении числа оборотов двигателя амплитуда колебаний возрастает, то частота колебаний меньше резонансной. Если же при этом амплитуда колебаний уменьшается, то частота колебаний больше резонансной. При резонансе углы отклонения маятников могут достигать  $\sim 15^{\circ}$ .

7. Поверните ручку "ЧАСТОТА КОЛЕБАНИЙ" в исходное положение.

8. Установите С образную скобу с пружинами 11 на расстоянии  $L = 175$  мм от оси вращения.

9. Повторите измерения в соответствии с пп. 5, 6, 7 этого задания.

10. Постройте графики зависимости  $A_{\phi}=A_{\phi}(\Omega)$  для  $L$ , равного 150 и 175 мм (см. рис. 4).

#### КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какие колебания называются антифазными, синфазными, биениями?
2. Каким колебаниям соответствуют частоты  $\omega_I$  и  $\omega_{II}$  главных колебаний?
3. Зависит ли период биения от способа вывода маятниковой системы из положения равновесия?
4. В каком случае наблюдается явление резонанса?
5. Сколько резонансных частот имеет связанная колебательная система с двумя степенями свободы?

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Матвеев А.Н. Механика и теория относительности. - М.: Высшая школа, 1986. - 320 с.
2. Стрелков С.П. Механика. - М.: Наука, 1975. - 560 с.