Всероссийская олимпиада по физике среди технических ВУЗов
Московский тур
2023

Задача 1. (8 баллов) Найти зависимость скорости движения ленты мимо считывающей головки магнитофона, если известно, что радиус намотанной ленты увеличивается пропорционально времени $r(t) = \gamma t + R$. Начальный радиус катушки R, толщина ленты d, причем $d \ll R$, в начальный момент времени вся лента намотана на ведомую катушку.

Задача 2. (16 баллов) Горизонтально расположенный диск радиуса R вращается относительно вертикальной оси с угловой скоростью ω_0. На диске по хорде закреплена трубка, в центре которой находится шарик. Определить скорость, с которой шарик, двигаясь без трения, вылетит из трубки после потери равновесия, если расстояние от оси вращения до трубки равно a.

Задача 3. (12 баллов) Два шарика с массами m и $m/2$ соединены пружиной жесткости k. Шарики находятся на гладкой горизонтальной поверхности в состоянии покоя. Третий шарик массой $m/2$, двигающийся со скоростью v вдоль линии, на которой находятся первые два шарика, в момент времени $t = 0$ сталкивается и прилипает к шарику с массой $m/2$. Найти закон изменения скорости шариков в процессе дальнейшего движения.

Задача 4. (12 баллов) Идеальная тепловая машина получает количество тепла Q_1 при температуре T_1, отдает тепло Q_2 при температуре T_2, и еще отдает некоторое количество теплоты при температуре T_3. Определить КПД машины.

Задача 5. (16 баллов) Точечный заряд q поместили на плоскость разделяющую области однородного диэлектрика с диэлектрическими проницаемостями ϵ_1 и ϵ_2. Определить напряженность электрического поля на расстоянии l от заряда под углом α к нормали.

Задача 6. (18 баллов) Цилиндрический световой пучок частотой ω_0 интенсивности I_0 отражается по нормали от движущегося зеркала с интенсивностью I. Определить частоту отраженного пучка.

Задача 7. (18 баллов) Вокруг планеты массы M и радиуса r вращается спутник массы m по круговой орбите. Расстояние между центрами планеты и спутника постоянно и равно R, причем $R \gg r$. Вращение планеты относительно собственной оси отсутствует. Определить приращение ускорения свободного падения, вызванное наличием спутника в точке на поверхности планеты максимально приближенной к спутнику Δg_1 и приращение Δg_2 в точке максимально удаленной от спутника. Деформацией планеты пренебречь.

Решение задач

Задача 1. Радиус намотанной ленты пропорционален времени, а за каждый оборот ведущей катушки внешний радиус увеличивается на толщину d, тогда период вращения ведущей катушки остается неизменным $T = \frac{d}{\gamma}$. Следовательно $v(t) = \dfrac{2\pi}{T} r(t) = \dfrac{2\pi}{d}\gamma r(t)$.

Ответ: $v(t) = \dfrac{2\pi}{d}\gamma\left(\gamma t + R\right) = \dfrac{2\pi}{d}\gamma r(t)$.

Задача 2. В системе отсчета связанной с диском уравнение динамики в проекции на ось трубки принимает вид: $m\frac{du}{dt} = m\omega_0^2 R\sin(\alpha) = m\omega_0^2 x$, где r - расстояние до оси вращения до шарика, α - угол между радиус вектором шарика и перпендикуляром, проведенным от оси к трубке, x - расстояние от середины трубки до шарика. Из $u = \dfrac{dx}{dt}$, получаем $dt = \dfrac{dx}{u}$, тогда $udu = \omega_0^2 x dx$, откуда в момент вылета $u_m = \omega_0 l = \omega_0\sqrt{R^2 - a^2}$. В неподвижной системе отсчета результирующая скорость по теореме косинусов $v = \sqrt{u^2 + \omega_0^2 R^2 \pm 2u\omega_0 R\cos(\gamma)}$, где γ - угол между касательной к краю диска и хордой на которой лежит трубка. Тогда

$$v = \sqrt{\omega_0^2 R^2 - \omega_0^2 a^2 + \omega_0^2 R^2 \pm 2\omega_0^2\sqrt{R^2 - a^2}a} = \omega_0\sqrt{2R^2 - a^2 \pm 2a\sqrt{R^2 - a^2}}$$

Ответ: $v = \omega_0\sqrt{2R^2 - a^2 \pm 2a\sqrt{R^2 - a^2}}$.

Задача 3. После удара центр масс всей системы будет двигаться со скоростью v_c, определяемой из закона количества движения

$\dfrac{mv}{2} = 2mv_c$, откуда $v_c = \dfrac{v}{4}$.

Сразу после удара шарик с массой m покоится, а слипшиеся шарики двигаются со скоростью $v = v/4$. В системе ц.м. шарики, расположенные на концах пружины, двигаются на встречу друг другу с равными скоростями $v/2 - v/4 = v/4$. В дальнейшем рассматриваемые частицы в системе ц.м. будут совершать гармонические колебания около положений равновесия, расположенных в точках $-L/2$ и $L/2$, где L - длина пружины в недеформированном состоянии. Уравнение движения одной из масс примет вид:

$$m\ddot{x} + 2kx = 0, \text{ решение } x = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t), \text{ где } \omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}.$$

Постоянные интегрирования A и B находим из начальных условий при $t = 0$: $x_0 = 0$, $\dot{x} = v/4$, откуда $A = 0$ и $B = v/(4\omega)$

Тогда $x = \dfrac{v}{4}\sqrt{\dfrac{m}{2k}}\sin\left(\sqrt{\dfrac{2k}{m}}t\right)$, скорость $\dot{x} = \dfrac{v}{4}\cos\left(\sqrt{\dfrac{2k}{m}}t\right)$.

В неподвижной системе отсчета $v_{1,2} = v_c \pm \dot{x} = \dfrac{v}{4}\left(1 \pm \cos\left(\sqrt{\dfrac{2k}{m}}t\right)\right)$.

Ответ: $v_{1,2} = \frac{v}{4}\left(1 \pm \cos\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}t\right)\right)$.

Задача 4. Разделим $Q_1 = Q_{11} + Q_{12}$, тогда

$$\frac{Q_{11}}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}, \text{ и } \frac{Q_{12}}{T_1} = \frac{Q_3}{T_3}; \ \frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_{11}+Q_{12}}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_3}{T_3}; \ Q_3 = \frac{T_3\left(Q_1T_2 - Q_2T_1\right)}{T_1T_2}.$$

$$\eta = 1 - \frac{Q_2+Q_3}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2 - Q_3}{Q_1} = \left(1 - \frac{T_3}{T_1}\right) - \frac{Q_2}{Q_1}\left(1 - \frac{T_3}{T_2}\right)$$

Ответ: $\eta = \left(1 - \frac{T_3}{T_1}\right) - \frac{Q_2}{Q_1}\left(1 - \frac{T_3}{T_2}\right)$.

Задача 5. В объеме однородного диэлектрика связанные заряды отсутствуют. На поверхности отсутствует нормальная составляющая электрического поля, а следовательно и связанные заряды. Таким образом точечный связанный заряд q' находится только вместе с зарядом q. Электрическое поле внутри диэлектрика, это поле точечного заряда величина которого равна $q - q'$

$$q' = \int PdS = P_1\frac{S}{2} + P_2\frac{S}{2} = (\epsilon_1 - 1)\epsilon_0\frac{q-q'}{4\pi\epsilon_0 r^2}2\pi r^2 + (\epsilon_2 - 1)\epsilon_0\frac{q-q'}{4\pi\epsilon_0 r^2}2\pi r^2 =$$

$$= (\epsilon_1 + \epsilon_2 - 2)\frac{q-q'}{2}; \ q' + (\epsilon_1 + \epsilon_2 - 2)\frac{q'}{2} = (\epsilon_1 + \epsilon_2 - 2)\frac{q}{2}; \ q' = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2 - 2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}q.$$

$$q - q' = q - \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2 - 2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}q = \frac{2q}{\epsilon_1 + \epsilon_2}; \ E = \frac{q-q'}{4\pi\epsilon_0 l^2} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0(\epsilon_1 + \epsilon_2)l^2}.$$

Ответ: $E = \frac{q}{2\pi\epsilon_0(\epsilon_1 + \epsilon_2)l^2}$.

Задача 6. Представим световой пучок как поток фотонов. Энергия фотона пропорциональна частоте $E = \hbar\omega$, частота следования фотонов равна ω_1. Откуда $I_0 = k\omega_0\omega_1$. Обе частоты при отражении от зеркала изменяются в соответствии с эффектом Доплера $\omega_1' = \frac{\omega_1}{\alpha}$ и $\omega_0' = \frac{\omega_0}{\alpha}$. Интенсивность после отражения $I = k\omega_0'\omega_1' = \frac{k\omega_0\omega_1}{\alpha^2} = \frac{I_0}{\alpha^2}$, откуда $\alpha = \sqrt{\frac{I_0}{I}}$, следовательно $\omega_0' = \omega_0\sqrt{\frac{I}{I_0}}$.

Ответ: $\omega_0' = \omega_0\sqrt{\frac{I}{I_0}}$.

Задача 7. Приращение ускорения возникает за счет силы со стороны спутника и за счет центробежных сил при вращении планеты и спутника вокруг общего центра масс, который смещен относительно центра тяжести планеты на $R_c = \frac{m}{M+m}R$. Условие круговой орбиты:

$$m\omega^2(R - R_c) = \gamma\frac{mM}{R^2}, \ m\omega^2\frac{MR}{M+m} = \gamma\frac{mM}{R^2}, \ \omega^2 = \gamma\frac{M+m}{R^3}, \text{ или}$$

$$M\omega^2R_c = \gamma\frac{mM}{R^2}, \ M\omega^2\frac{mR}{M+m} = \gamma\frac{mM}{R^2}, \ \omega^2 = \gamma\frac{M+m}{R^3} \text{ - тот же результат.}$$

Ускорение в ближайшей к спутнику точке поверхности:

$$\Delta g_1 = -\gamma\frac{m}{(R-r)^2} + \omega^2R_c = -\gamma\frac{m}{(R-r)^2} + \gamma\frac{M+m}{R^3}\frac{mR}{M+m} \approx -\gamma\frac{2mr}{R^3}.$$

Ускорение в дальней от спутника точке поверхности:

$$\Delta g_2 = \gamma \frac{m}{(R+r)^2} - \omega^2 R_c = \gamma \frac{m}{(R+r)^2} - \gamma \frac{M+m}{R^3} \frac{mR}{M+m} \approx -\gamma \frac{2mr}{R^3}.$$

Ответ: $\Delta g_1 = \Delta g_2 = -\gamma \dfrac{2mr}{R^3}$.