

Андреев А.Г., Левина Е.Ю., Лунёва Л.А., Макаров А.М.

**Измерение составляющих
магнитного поля Земли
методом наложения внешнего поля**

Цель работы:

- ознакомиться с современными физическими представлениями о магнитном поле Земли;
- ознакомиться с экспериментальными приборами исследования магнитных явлений;
- измерить составляющие вектора магнитной индукции магнитного поля Земли в месте нахождения экспериментальной установки;
- убедиться в правильности показаний тесламетра на основе датчика Холла.

Экспериментальное оборудование:

магнитный компас, кольца Гельмгольца, магнитометр на основе датчика Холла, блок питания, реостат, соединительные провода и приборы измерения силы тока и напряжения на клеммах источника питания.

Содержание руководства:

- в теоретической части приведены краткие сведения о магнитном поле Земли, необходимые сведения о магнитном поле замкнутого проводника с током, введено понятие магнитного диполя, подчёркнута возможность описать магнитное поле Земли как поле специально ориентированного магнитного диполя, пояснена разница определений «географические» и «магнитные» координаты земной поверхности (эффект магнитного склонения) и определено понятие «магнитное склонение». Показано преимущество использования колец Гельмгольца по сравнению с одиночным круговым кольцом с током при измерении «внешнего» магнитного поля. Описан принцип действия измерителя магнитной индукции (тесламетра) на основе датчика Холла;
- в экспериментальной части содержится подробная инструкция по выполнению измерений и обработке их результатов.

Теоретическая часть.

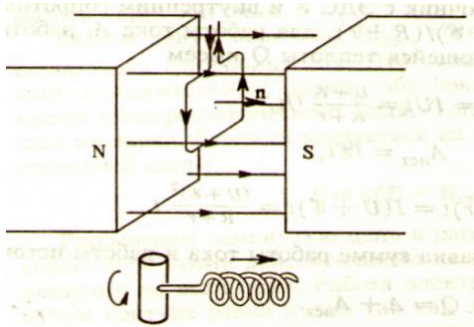
Введение.

Магнитное поле проявляется в действии на магнитную стрелку, на рамку с током, на движущийся заряд. На рамку с током и на магнитную стрелку магнитное поле оказывает ориентирующее и силовое действие, на прямой проводник с током и на движущийся заряд в магнитном поле действует сила, перпендикулярная току и направлению движения заряда.

Для наглядного изображения стационарных магнитных полей используют силовые линии. Силовыми линиями магнитного поля (линиями магнитной индукции) называются линии, проведённые в пространстве так, что в каждой точке поля касательная к линии магнитной индукции совпадает с направлением вектора \vec{B} в этой точке поля. Эти линии непрерывны. В отличие от потенциального электрического поля, где силовые линии начинаются на положительных зарядах и оканчиваются на отрицательных, магнитное поле является *соленоидальным* или *вихревым*: его силовые линии всегда замкнуты и не пересекаются друг с другом. Другими словами, магнитное поле не имеет магнитных зарядов как источников поля.

В отличие от электрического поля силовую характеристику магнитного поля по причинам исторического характера называют не напряжённостью, а *индукцией*. Магнитная индукция \vec{B} магнитного поля – это векторная физическая величина. Обычно её вводят путём рассмотрения действия магнитного поля на маленькую пробную рамку с током.

Как и в случае пробного заряда в электростатике, такая рамка должна удовлетворять определённым требованиям. Во-первых, рамка должна быть плоской и иметь достаточно малые размеры, чтобы по её поведению можно было судить о магнитном поле в малой области пространства (в «точке»). Во-вторых, ток в рамке должен быть достаточно мал, чтобы его влиянием на источники измеряемого магнитного поля можно было пренебречь.



По определению, направление вектора \vec{B} совпадает с направлением нормали к свободной пробной рамке с током, установившейся в магнитном поле (см. рис. 1). За направление нормали \vec{n} к плоскости рамки принимают то направление, в котором будет перемещаться винт с правой нарезкой (штопор), если вращать его по направлению тока в рамке.

Рис.1. Рамка с током в магнитном поле.

Если повернуть рамку на некоторый угол α ($\alpha \equiv (\vec{B}, \hat{n})$) относительно её установившегося положения ($\vec{B} \uparrow \uparrow \vec{n}$), то, как показывает опыт, на рамку будет действовать момент сил, пропорциональный силе тока в рамке, её площади S и синусу угла поворота:

$$M \approx I S \sin \alpha .$$

Этот вращающий момент максимален, когда рамка ориентирована перпендикулярно магнитным линиям ($\vec{n} \perp \vec{B}$), т.е. когда $\sin \alpha = 1$: $M_{\max} \sim I S$. Отношение максимального вращающего момента к произведению тока I на площадь поперечного сечения рамки S характеризует магнитное поле в том месте, где расположена рамка. Это отношение и принимают по определению за модуль B вектора магнитной индукции в системе единиц СИ:

$$B = \frac{M_{\max}}{I S} .$$

За единицу магнитной индукции принята индукция такого поля, в котором на контур площадью 1 м^2 при силе тока 1 А действует максимальный вращающий момент $1\text{ Н} \cdot \text{м}$. Такая единица называется тесла ($Tл$):

$$1\text{ Тл} = \frac{1\text{ Н} \cdot \text{м}}{1\text{ А} \cdot 1\text{ м}^2} = 1 \frac{\text{Н}}{\text{А} \cdot \text{м}} = 1 \frac{\text{кг}}{\text{А} \cdot \text{с}^2} .$$

Направление магнитных силовых линий в каждой точке пространства совпадает с направлением вектора магнитной индукции \vec{B} . Как и в случае электрического поля, картину магнитных силовых линий можно сделать «видимой». Для этого используют мелкие железные опилки, которые в магнитном поле намагничиваются и, подобно маленьким магнитным стрелкам, ориентируются вдоль силовых линий. На рисунке 2

приведены получаемые таким образом картины магнитных полей: а) поле кругового тока, б) поле длинной катушки-соленоида, в) поле прямого постоянного магнита.

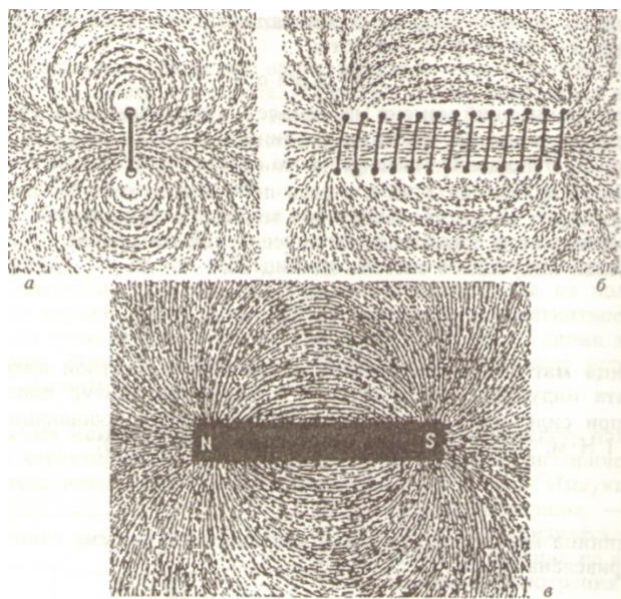


Рис.2. Примеры визуализации магнитных полей токов.

Для расчёта магнитных полей, создаваемых заданными токами, нужно учесть, что индукция магнитного поля, создаваемого текущим по проводнику током, определяется совместным действием всех отдельных участков проводника. Магнитное поле удовлетворяет принципу суперпозиции, т.е. принципу независимого действия полей, учитывающему векторный характер магнитной индукции:

$$\vec{B} = \int d\vec{B},$$

где $d\vec{B}$ - магнитная индукция магнитного поля, созданного элементом тока $I d\vec{l}$, равному произведению силы тока I на элемент длины проводника $d\vec{l}$. На опыте невозможно осуществить отдельный участок тока, так что нельзя непосредственно измерить и создаваемое им поле. Измерить можно только суммарную индукцию магнитного поля, создаваемого всеми элементами замкнутого тока. Существует закон, называемый **законом Био-Савара-Лапласа**, применяя который к участкам проводника произвольной формы (в условиях магнитостатики), можно во всех случаях рассчитать значение результирующей индукции магнитного поля. Следует заметить, что расчёт результирующей индукции магнитного поля с помощью закона Био-Савара-Лапласа выполняется наиболее просто, если поле, созданное проводником с током, обладает определённым типом симметрии. В отсутствие симметрии расчёт тоже возможен, но уже с использованием современных вычислительных средств.

1. Магнитное поле контура с током.

В условиях магнитостатики имеет место закон Био-Савара-Лапласа:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \equiv \text{rot} \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot d\vec{l}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = \text{rot}(d\vec{A}) \quad (1)$$

Здесь $d\vec{B}$ - дифференциал вектора магнитной индукции, μ_0 - магнитная постоянная, I - сила электрического тока, $d\vec{l}'$ - направленный элемент контура, \vec{r}' - радиус-вектор расположения элемента контура с током, \vec{r} - радиус-вектор точки наблюдения, $d\vec{A}$ - дифференциал векторного потенциала магнитного поля.

Для векторного поля \vec{B} справедлива теорема Гаусса в дифференциальной форме: $\text{div } \vec{B} = 0$. Поле \vec{B} можно представить в виде ротора вспомогательного векторного поля \vec{A} , называемого векторным потенциалом:

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A}, \quad (2)$$

поскольку $\text{div } \text{rot} \vec{A} \equiv 0, \quad \forall \vec{A}$. Понятием векторного потенциала магнитного поля можно пользоваться для расчёта магнитного поля, образованного заданной системой стационарных электрических токов.

В соответствии с принципом суперпозиции имеют место соотношения:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \oint_C \frac{I \cdot d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}, \quad (3)$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \oint_C \frac{I \cdot d\vec{l}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (4)$$

Здесь C – замкнутый контур (тонкий проводник) с током, штрихом отмечены величины, связанные с расположением источников магнитного поля.

Анализ приведённых выражений затруднён, поскольку только в отдельных частных случаях существуют достаточно простые аналитические формулы для этих интегралов, хотя для конкретных точек наблюдения вычисление проекций векторов \vec{B} и \vec{A} принципиальных трудностей не представляет, а вычислительные трудности преодолеваются с помощью современного математического обеспечения и вычислительных средств. Пример вычисления магнитного поля кругового тока рассмотрен в п.9 работы.

2. Дипольный магнитный момент контура с током.

Для произвольного замкнутого тонкого проводника с током I можно ввести (по определению) векторную величину – дипольный магнитный момент \vec{p}_m :

$$\vec{p}_m = \frac{1}{2} \cdot \oint_C \vec{r} \times I \cdot d\vec{l}, \quad (5)$$

где C – замкнутая пространственная кривая, совпадающая с проводником с током, \vec{r} – радиус-вектор произвольной точки рассматриваемой кривой, вектор $d\vec{l}$ – элемент кривой, направление вектора совпадает с направлением электрического тока I , текущего по проводнику.

Заметим, что векторное произведение $\frac{1}{2} \cdot \vec{r} \times d\vec{l}$ определяет ориентированный элемент площади поверхности «конуса» $d\vec{S} = \vec{n} \cdot dS$ с вершиной в начале координат с нормалью \vec{n} , направленной «внутрь» конуса. Если на рассматриваемый замкнутый контур натянуть произвольную поверхность S' , разбить её на элементарные площадки dS' , определить элементарные векторные элементы $d\vec{S}' = \vec{n}' \cdot dS'$ с локально определёнными нормальями \vec{n}' , ориентированными внутрь получившегося тела, можно воспользоваться математическим результатом

$$\int d\vec{S} + \int d\vec{S}' = 0, \quad (6)$$

справедливым для любой замкнутой поверхности. Это соотношение позволяет определить вектор магнитного дипольного момента произвольного контура с током независимо от выбора начала координат:

$$\vec{p}_m = I \cdot \int \vec{n}'' \cdot dS''. \quad (7)$$

Здесь поверхность интегрирования – произвольная поверхность, опирающаяся на рассматриваемый контур с током I , а направление вектора нормали \vec{n}'' к элементу поверхности dS'' согласовано с направлением электрического тока по правилу правого винта.

Для плоского контура поверхность S'' можно выбрать плоской, при этом \vec{n}'' является постоянной векторной величиной, её можно вынести из-под знака интеграла:

$$\vec{p}_m = I \cdot S \cdot \vec{n}. \quad (8)$$

Заметим, что одну и ту же величину магнитного дипольного момента можно получить при различных сочетаниях величин I и S . В практических приложениях, как правило, рассматривают «малые» контуры с «большим» током: в этих случаях упрощаются зависимости для магнитного поля, образованного контуром с током, и легче описываются эффекты воздействия стороннего магнитного поля на контур с током.

Если для рассматриваемого контура известны параметрические уравнения пространственной кривой

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad (9)$$

и сила тока является постоянной величиной, то, используя соотношение для проекций векторного произведения (5), можно определить проекции вектора \vec{p}_m на оси декартовой системы координат:

$$\begin{aligned} p_{mx} &= \frac{I}{2} \cdot \int \left(y(t) \cdot \frac{dz(t)}{dt} - z(t) \cdot \frac{dy(t)}{dt} \right) \cdot dt, \\ p_{my} &= \frac{I}{2} \cdot \int \left(z(t) \cdot \frac{dx(t)}{dt} - x(t) \cdot \frac{dz(t)}{dt} \right) \cdot dt, \\ p_{mz} &= \frac{I}{2} \cdot \int \left(x(t) \cdot \frac{dy(t)}{dt} - y(t) \cdot \frac{dx(t)}{dt} \right) \cdot dt. \end{aligned} \quad (10)$$

3. Магнитный диполь во внешнем магнитном поле.

Элемент проводника $d\vec{l}$ с током I испытывает во внешнем магнитном поле с магнитной индукцией \vec{B} воздействие силы Ампера:

$$d\vec{F}_A = I \cdot d\vec{l} \times \vec{B}, \quad (11)$$

направление вектора $d\vec{l}$ при этом совпадает с направлением электрического тока. Располагая выражением для элементарной силы Ампера, можно определить элементарный момент этой силы относительно начала координат:

$$d\vec{M} = \vec{r} \times d\vec{F}_A. \quad (12)$$

Для расчёта силового взаимодействия произвольного контура с током можно воспользоваться принципом суперпозиции. В случае, когда характерный размер рассматриваемого контура с током значительно меньше характерного размера неоднородности внешнего магнитного поля, достаточную точность вычислений обеспечивает «дипольное приближение»:

$$\vec{F} = (\vec{p}_m \cdot \nabla) \cdot \vec{B}, \quad (13)$$

$$\vec{M} = \vec{p}_m \times \vec{B}, \quad (14)$$

$$U = -\vec{p}_m \cdot \vec{B}. \quad (15)$$

Здесь \vec{p}_m - магнитный дипольный момент системы, ∇ - оператор Гамильтона (оператор «набла»), \vec{F} - сила, \vec{M} - момент, U - потенциальная энергия, приобретаемая магнитным диполем во внешнем магнитном поле. В однородном магнитном поле (вектор магнитной индукции постоянная векторная величина) результирующая сила

воздействия на магнитный диполь обращается в нуль, что важно для выполнения эксперимента в настоящей лабораторной работе.

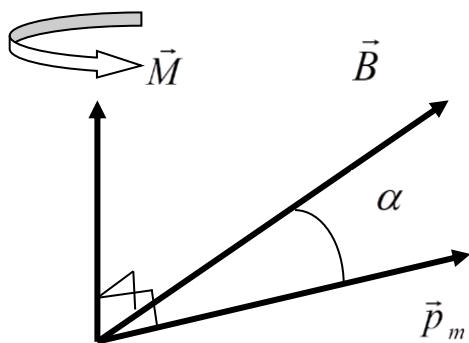


Рис.3. Магнитный диполь в магнитном поле.

На рисунке 3 показан вектор механического момента \vec{M} как результат векторного произведения магнитного дипольного момента \vec{p}_m и вектора магнитной индукции \vec{B} . Легко видеть, что внешнее магнитное поле стремится повернуть вектор магнитного дипольного момента вдоль силовой линии магнитного поля.

На рисунке 4 приведен график зависимости безразмерной потенциальной энергии магнитного диполя от угла между вектором магнитного момента диполя и вектором магнитной индукции.

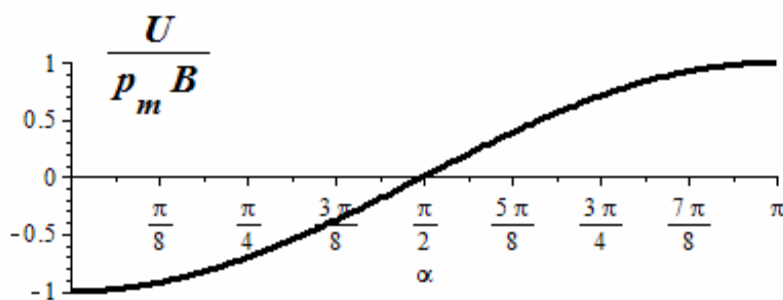


Рис.4. Потенциальная энергия магнитного диполя.

Из курса механики известно, что механическая система стремится занять положение с минимумом потенциальной энергии. В рассматриваемом случае это расположение вектора магнитного момента диполя вдоль силовой линии магнитной индукции, когда направления рассматриваемых векторов совпадают. Естественно, что результаты «силового» и «энергетического» анализа не противоречат друг другу.

В настоящей лабораторной работе отмеченная особенность взаимодействия магнитного диполя с внешним магнитным полем используется как физическая основа эксперимента.

Введённое выше понятие магнитного момента имеет смысл для любого замкнутого контура с током, а не только для круговой рамки: магнитное поле на больших расстояниях не зависит от формы контура, подобно тому, как электрическое поле любой электронейтральной в целом системы зарядов (например, молекулы) эквивалентно с известной степенью приближения полю диполя. Магнитный дипольный момент – это важная физическая характеристика контура с током, через которую выражается не только создаваемое им поле, но и действие на него других магнитных полей. Например, зависимость $B = \frac{M_{\max}}{IS}$, служащая определением магнитной индукции магнитного поля,

записывается через магнитный момент следующим образом: $B = \frac{M_{\max}}{p_m}$. Для магнитного

поля не существует аналога точечного заряда как источника поля и как пробного объекта, действием на который проявляет себя это поле. Простейший объект такого рода для магнитного поля – это не магнитный заряд, а магнитный диполь, свойства которого во многом аналогичны свойствам электрического диполя.

4. Магнитное поле магнитного диполя.

На достаточно больших расстояниях от рассматриваемого контура с током по сравнению с характерным линейным размером контура можно использовать приближённые зависимости для расчёта индукции \vec{B} и векторного потенциала \vec{A} магнитного поля:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{3 \cdot (\vec{p}_m \cdot (\vec{r} - \vec{r}')) \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^5} - \frac{\vec{p}_m}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right\}, \quad (16)$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\vec{p}_m \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}, \quad (17)$$

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}. \quad (18)$$

Здесь \vec{r} - радиус-вектор точки наблюдения, \vec{r}' - радиус-вектор расположения магнитного диполя (магнитного момента «малого» контура с током). Заметим, что приведённые выражения являются результатом отбрасывания членов более высокого порядка малости в разложении Тэйлора приведённых выше зависимостей (3) - (4) для векторных полей $\vec{B}(x, y, z)$ и $\vec{A}(x, y, z)$.

5. Силовые линии магнитного поля \vec{B} магнитного диполя.

Ниже будем рассматривать ситуации, когда центр магнитного диполя совпадает с началом координат. Для практического использования приведённых зависимостей (в частности, расчёты магнитного поля Земли) достаточно знать составляющие (проекции) вектора \vec{p}_m вдоль координатных направлений декартовой системы координат

$$\begin{aligned} p_{mx} &= p_m \cdot \sin(\vartheta_0) \cdot \cos(\varphi_0) \\ p_{my} &= p_m \cdot \sin(\vartheta_0) \cdot \sin(\varphi_0) \\ p_{mz} &= p_m \cdot \cos(\vartheta_0) \end{aligned} \quad (19)$$

где p_m - модуль магнитного момента диполя, расположенного в начале системы координат, ϑ_0 и φ_0 угловые координаты вектора магнитного момента в сферической системе координат.

Точка наблюдения описывается соответствующим радиус-вектором:

$$\begin{aligned} x &= r_x = r \cdot \sin(\vartheta) \cdot \cos(\varphi) \\ y &= r_y = r \cdot \sin(\vartheta) \cdot \sin(\varphi) \\ z &= r_z = r \cdot \cos(\vartheta) \end{aligned} \quad (20)$$

Рис.5. Сферическая система координат.

Здесь $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ - расстояние от центра диполя до точки наблюдения, а ϑ и φ - угловые (сферические) координаты точки наблюдения (см. рис. 5).

Зависимости для вычисления проекций вектора магнитной индукции на оси декартовой системы координат для произвольной точки наблюдения имеют вид:

$$\begin{aligned}
B_x &= \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \left\{ \frac{3 \cdot (x \cdot p_{mx} + y \cdot p_{my} + z \cdot p_{mz}) \cdot x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} - \frac{p_{mx}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right\} \\
B_y &= \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \left\{ \frac{3 \cdot (x \cdot p_{mx} + y \cdot p_{my} + z \cdot p_{mz}) \cdot y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} - \frac{p_{my}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right\} \\
B_z &= \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \left\{ \frac{3 \cdot (x \cdot p_{mx} + y \cdot p_{my} + z \cdot p_{mz}) \cdot z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} - \frac{p_{mz}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right\}
\end{aligned} \tag{21}$$

Полученные зависимости позволяют сформировать систему дифференциальных уравнений для силовых линий магнитного поля:

$$\frac{dx}{B_x(x, y, z)} = \frac{dy}{B_y(x, y, z)} = \frac{dz}{B_z(x, y, z)}. \tag{22}$$

Решение этой системы дифференциальных уравнений в аналитическом виде возможно только в отдельных, частных и очень простых случаях. А численное решение этой системы вполне выполнимо. Действительно, пусть силовая линия проходит через точку пространства (x_0, y_0, z_0) . В этой точке известны величины $B_x(x_0, y_0, z_0)$, $B_y(x_0, y_0, z_0)$, $B_z(x_0, y_0, z_0)$. Если задать произвольно один из дифференциалов, например, dx , то два других полностью определены в соответствии с системой дифференциальных уравнений силовых линий. Это позволяет перейти к следующей точке той же самой силовой линии

$$x = x_0 + dx, \quad y = y_0 + dy, \quad z = z_0 + dz,$$

в которой по условию снова известны проекции вектора магнитной индукции, значит, можно продолжить практическое построение конкретной силовой линии. Современные вычислительные системы MAPLE, MATHEMATICA и ряд других имеют специальные функции, обеспечивающие графическое построение картины силовых линий на плоскости и в пространстве по заданным зависимостям проекций векторного поля на оси декартовой системы координат.

6. Силовые линии магнитного поля Земли (простейший случай).

Картина силовых линий магнитного поля Земли (магнитный дипольный момент ориентирован по оси вращения Земли, $p_{mx} = 0$, $p_{my} = 0$, $p_{mz} = |\vec{P}_m| = const$) представлена на рисунке 6.

На рисунке надо обратить внимание на следующие характерные особенности расположения силовых линий:

- в окрестности экватора (горизонтальная плоскость симметрии) силовые линии магнитного поля не имеют вертикальной составляющей;

- в окрестности оси вращения Земли (вертикальная ось симметрии) силовые линии "входят" в северный географический полюс Земли – это **южный магнитный полюс** по определению;

- в окрестности оси вращения Земли силовые линии "выходят" из южного географического полюса Земли – это **северный магнитный полюс** по определению;

- в рамках рассматриваемой модели (географические полюсы Земли совпадают с магнитными полюсами с точностью до "наоборот"): компас показывает направление на северный полюс Земли.

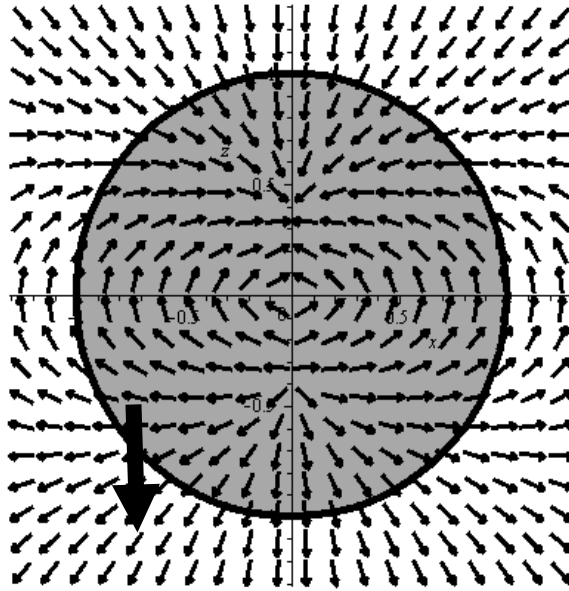


Рис.6. Иллюстрация силовых линий магнитного поля Земли.

Магнитное наклонение (это угол между силовой линией магнитного поля и горизонтальной плоскостью) в северном полушарии - отрицательное - магнитная стрелка своим северным полюсом отклоняется вниз.

Магнитное наклонение в южном полушарии - положительное - магнитная стрелка своим северным полюсом отклоняется вверх.

7. Магнитное наклонение и магнитное склонение на поверхности Земли.

Магнитное поле Земли приближённо (качественная картина явления) можно считать полем магнитного диполя с магнитным дипольным моментом $|\vec{P}_m| = 8,3 \cdot 10^{22} \text{ А} \cdot \text{м}^2$, центр магнитного диполя практически совпадает с центром Земли, эффект магнитного наклонения можно обнаружить (и качественно объяснить), если считать, что магнитный диполь направлен по оси вращения Земли от северного географического полюса к южному географическому полюсу. Эффект магнитного склонения обнаруживается с использованием более сложной модели, в которой вектор дипольного магнитного момента Земли отклоняется от оси вращения Земли на 11,4 градуса, его центр совпадает с центром Земли и плоскость, в которой располагается рассматриваемый диполь, совпадает с плоскостью гринвичского меридиана. В теории магнетизма Земли разработаны более детализированные модели, позволяющие рассчитать теоретическое поле Земли не только в окрестности Москвы, а обеспечить необходимую точность вычислений по множеству точек наблюдения. Они, естественно, более сложные, достаточно сказать, что стандартная модель фигуры Земли учитывает отклонение от сферы (Земля не шар, а эллипсоид вращения). Кроме того, приходится учитывать изменение вектора дипольного момента Земли с течением времени. Для целей настоящей лабораторной работы достаточно рассмотреть упомянутые выше две простейшие модели и обсудить разницу получаемых качественных результатов. Следует иметь в виду, что на практике величины магнитного склонения и магнитного наклонения подвержены влиянию локальных особенностей земной коры (например, Курская магнитная аномалия) и других факторов.

Итак, если величина и ориентация дипольного магнитного момента Земли известны, если фигура Земли является шаром с известным значением радиуса Земли, то справедливы приведённые выше зависимости для проекций вектора магнитной

индукции на оси декартовой системы координат. Напомним, что декартовые проекции магнитного дипольного момента определены соотношениями (17), угловые параметры в которых приведены в настоящем разделе, а декартовые проекции вектора магнитной индукции вычисляются по соотношениям (19). Для произвольной точки наблюдения на поверхности Земли имеем $r = R = const$, $r' = |\vec{r}'| = 0$, выражения B_x, B_y, B_z , приведённые выше, полностью определены.

Вычислим декартовые компоненты единичного вектора нормали к поверхности сферы радиуса $r = R$ в точке наблюдения:

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{x \cdot \vec{e}_x + y \cdot \vec{e}_y + z \cdot \vec{e}_z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \quad (23)$$

Нормальная к поверхности сферы компонента вектора магнитной индукции определяется выражением:

$$\vec{B}_n = (\vec{B} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{n} = \frac{(B_x \cdot x + B_y \cdot y + B_z \cdot z) \cdot (x \cdot \vec{e}_x + y \cdot \vec{e}_y + z \cdot \vec{e}_z)}{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (24)$$

Проекция нормальной к поверхности Земли составляющей вектора магнитной индукции на оси декартовой системы координат суть:

$$B_{nx} = \frac{(B_x \cdot x + B_y \cdot y + B_z \cdot z) \cdot x}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad B_{ny} = \frac{(B_x \cdot x + B_y \cdot y + B_z \cdot z) \cdot y}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad B_{nz} = \frac{(B_x \cdot x + B_y \cdot y + B_z \cdot z) \cdot z}{x^2 + y^2 + z^2} \quad (25)$$

Касательная к поверхности сферы компонента вектора магнитной индукции \vec{B}_τ может быть рассчитана как разность вектора магнитной индукции \vec{B} и вектора \vec{B}_n :

$$\begin{aligned} \vec{B}_\tau = \vec{B} - \vec{B}_n = & \left(B_x - \frac{(B_x \cdot x + B_y \cdot y + B_z \cdot z) \cdot x}{x^2 + y^2 + z^2} \right) \cdot \vec{e}_x + \\ & + \left(B_y - \frac{(B_x \cdot x + B_y \cdot y + B_z \cdot z) \cdot y}{x^2 + y^2 + z^2} \right) \cdot \vec{e}_y + \left(B_z - \frac{(B_x \cdot x + B_y \cdot y + B_z \cdot z) \cdot z}{x^2 + y^2 + z^2} \right) \cdot \vec{e}_z \end{aligned} \quad (26)$$

Проекция касательной составляющей вектора магнитной индукции по отношению к поверхности Земли на оси декартовой системы координат имеют вид:

$$B_{\tau x} = B_x - \frac{(B_x \cdot x + B_y \cdot y + B_z \cdot z) \cdot x}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad (27)$$

$$B_{\tau y} = B_y - \frac{(B_x \cdot x + B_y \cdot y + B_z \cdot z) \cdot y}{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (28)$$

$$B_{\tau z} = B_z - \frac{(B_x \cdot x + B_y \cdot y + B_z \cdot z) \cdot z}{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (29)$$

Угол наклона силовой линии магнитной индукции «к горизонту» - **магнитное наклонение** - можно определить соотношением

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{B} \cdot \vec{B}_\tau|}{|\vec{B}| \cdot |\vec{B}_\tau|} = \frac{B_x \cdot B_{\tau x} + B_y \cdot B_{\tau y} + B_z \cdot B_{\tau z}}{\sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2} \cdot \sqrt{B_{\tau x}^2 + B_{\tau y}^2 + B_{\tau z}^2}}. \quad (30)$$

Явление магнитного наклона (ось вращения магнитной стрелки компаса ориентирована горизонтально, стрелка может вращаться в вертикальной плоскости, в отсутствие вертикальной составляющей магнитного поля стрелка в состоянии покоя является горизонтальной) замечено ещё в XVI веке. На рисунке 7 приведена иллюстрация явления магнитного наклона из книги Р. Нормана «The Newe Attractive» (1581 г.)

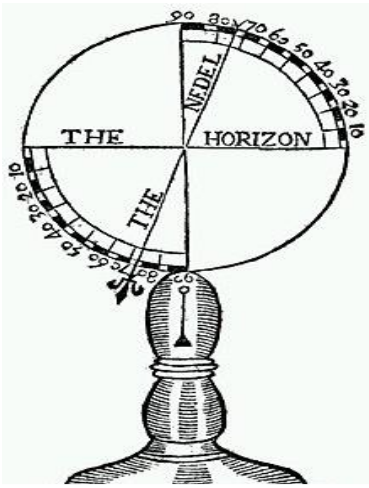


Рис.7. Прибор для измерения магнитного наклона

Для вычисления магнитного склонения необходимо знать положение географического меридиана в точке наблюдения. Его можно определить единичным ортом координатного направления ϑ сферической системы координат с учётом того, что этот орт должен быть направлен в сторону северного географического полюса Земли:

$$\vec{e}_r^0 = \vec{e}_x \cdot \cos(\vartheta) \cdot \cos(\varphi) + \vec{e}_y \cdot \cos(\vartheta) \cdot \sin(\varphi) - \vec{e}_z \cdot \sin(\vartheta), \quad |\vec{e}_r^0| = 1. \quad (31)$$

Магнитное склонение как явление состоит в том, что стрелка компаса в конкретном месте земной поверхности отклоняется от направления на географический северный полюс.

На рисунке 8 - иллюстрация магнитного склонения. Магнитное склонение – это угол (в работе этот угол назван β) между горизонтальной составляющей вектора магнитной индукции и направлением на географический северный полюс (направление географического меридиана).

$$\beta = \arccos\left(\frac{\vec{B}_r \cdot \vec{e}_r^0}{|\vec{B}_r|}\right) = \arccos\left(\frac{B_{rx}e_{rx}^0 + B_{ry}e_{ry}^0 + B_{rz}e_{rz}^0}{\sqrt{B_{rx}^2 + B_{ry}^2 + B_{rz}^2}}\right) \quad (32)$$

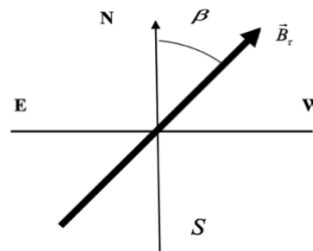


Рис.8. Иллюстрация магнитного склонения. «Жирная стрелка» - стрелка компаса.

8. Параметры магнитного поля в окрестности Москвы.

Рассмотрим магнитное поле Земли в окрестности города Москва. Географические координаты города – 57 градусов северной широты и 19 градусов восточной долготы. Если начало декартовых координат совместить с центром Земли, ось Z совместить с осью вращения Земли, ось координат X расположить в плоскости гринвичского меридиана, то координаты Москвы определены соотношениями:

$$X=0,793 R, \quad Y= 0,273 R, \quad Z=0,544 R,$$

где $R=6400$ км – радиус земного шара.

Расчёт величины магнитного наклона по первой упрощенной модели земного магнетизма (магнитный дипольный момент Земли совпадает по направлению с осью

вращения Земли) приводит к следующим результатам $\alpha = \alpha(\vartheta)$, где ϑ угловая координата сферической системы координат (по меридиану), напомним, что северная широта отсчитывается от географического экватора к северному географическому полюсу. Рассматриваемая зависимость приведена на рис. 9, на котором отмечено положение города Москва. Численное значение магнитного наклонения в окрестности Москвы по рассматриваемой теоретической модели составляет около минус 72 градусов.



Рис.9. Магнитное наклонение в районе Москвы.

Магнитное склонение магнитного поля Земли по рассматриваемой теоретической модели равно нулю в любой точке поверхности Земли (точки северного и южного географических полюсов требуют особого рассмотрения).

По более полной модели земного магнетизма, учитывающей дополнительно наличие отклонения вектора магнитного дипольного момента Земли от ориентации оси вращения Земли, магнитное наклонение α и магнитное склонение β становятся функциями сферических угловых координат точки наблюдения, т.е. в итоге функциями широты и долготы точки наблюдения:

$$\alpha = \alpha(\vartheta, \varphi), \quad \beta = \beta(\vartheta, \varphi).$$

Учитывая полученные выше результаты, нетрудно убедиться в том, что эти функции вычислимы. Ниже приведены графики зависимостей α и β от координаты ϑ при заданном значении координаты φ и от координаты φ при заданном значении координаты ϑ .

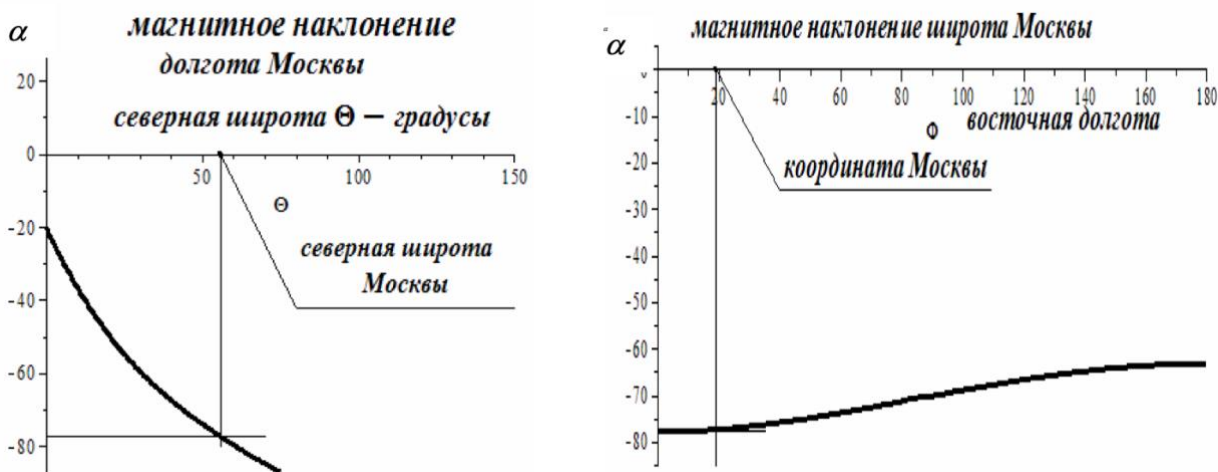


Рис.10. Магнитное наклонение в районе Москвы.

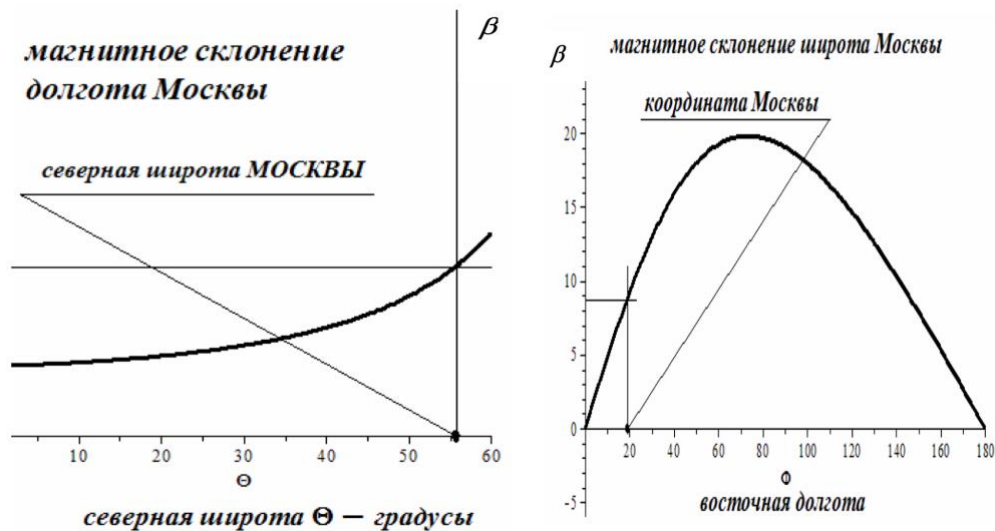


Рис.11. Магнитное склонение в районе Москвы.

Анализируя полученные результаты, заметим, что для целей практического ориентирования на поверхности Земли в окрестности города Москва движение «по компасу» на небольшие расстояния не может приводить к существенным ошибкам, а при необходимости определять направление на достаточно удалённые цели приходится учитывать явление магнитного склонения.

9. Магнитное поле кругового контура с током.

Пусть по тонкому плоскому круговому кольцу, расположенному в плоскости $z=0$, с центром в начале координат $x = 0, y = 0$ течёт ток I . Пусть радиус проводящего кольца равен a . Пусть точка наблюдения M вектора магнитной индукции \vec{B} определена радиус-вектором \vec{r} с компонентами $\{x, y, z\}$ (Рис12).

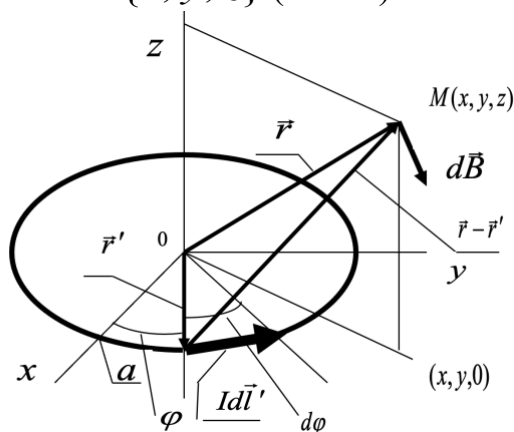


Рис.12. Схема расчёта магнитного поля плоского кругового кольца с током в произвольной точке пространства.

Компоненты радиус-вектора \vec{r}' расположения элемента контура с током удобно описать параметрически:

$$\{a \cdot \cos \varphi, a \cdot \sin \varphi, 0\},$$

где φ - угол между направлением на рассматриваемый элемент и положительным направлением оси абсцисс. Допустим, что электрический ток течёт вдоль контура против часовой стрелки, если учесть положительное направление оси аппликат. В этом случае вектор $d\vec{l}'$ имеет следующие составляющие:

$$d\vec{l}' = \{-a \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi, a \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi, 0\}. \quad (33)$$

Разность радиус-векторов точки наблюдения и точки расположения элемента контура с током описывается выражением:

$$\vec{r} - \vec{r}' = \{x - a \cdot \cos \varphi, y - a \cdot \sin \varphi, z\}. \quad (34)$$

Модуль выражения (2) имеет вид:

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{(x - a \cdot \cos \varphi)^2 + (y - a \cdot \sin \varphi)^2 + z^2}. \quad (35)$$

Векторное произведение $d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')$ принимает форму:

$$\begin{aligned} d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}') &= \vec{i} \cdot a \cdot z \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi + \vec{j} \cdot a \cdot z \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi + \\ &+ \vec{k} \cdot (a^2 - ay \sin \varphi - a \cdot x \cdot \cos \varphi) \cdot d\varphi, \\ \vec{i} &= \{1, 0, 0\}, \quad \vec{j} = \{0, 1, 0\}, \quad \vec{k} = \{0, 0, 1\}. \end{aligned} \quad (36)$$

Запишем координатную форму для дифференциалов проекций индукции магнитного поля для рассматриваемого случая:

$$dB_x = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \frac{a \cdot z \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi}{(\sqrt{(x - a \cdot \cos \varphi)^2 + (y - a \cdot \sin \varphi)^2 + z^2})^3}, \quad (37)$$

$$dB_y = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \frac{a \cdot z \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi}{(\sqrt{(x - a \cdot \cos \varphi)^2 + (y - a \cdot \sin \varphi)^2 + z^2})^3}, \quad (38)$$

$$dB_z = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \frac{-a \cdot \sin \varphi \cdot (y - a \sin \varphi) - a \cdot \cos \varphi \cdot (x - a \cdot \cos \varphi)}{(\sqrt{(x - a \cdot \cos \varphi)^2 + (y - a \cdot \sin \varphi)^2 + z^2})^3} d\varphi. \quad (39)$$

В соответствии с принципом суперпозиции для расчёта компонент вектора магнитной индукции в точке наблюдения необходимо проинтегрировать выражения (37)-(39) по переменной φ в пределах от 0 до 2π :

$$B_x = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{a \cdot z \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi}{(\sqrt{(x - a \cdot \cos \varphi)^2 + (y - a \cdot \sin \varphi)^2 + z^2})^3}, \quad (40)$$

$$B_y = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{a \cdot z \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi}{(\sqrt{(x - a \cdot \cos \varphi)^2 + (y - a \cdot \sin \varphi)^2 + z^2})^3}, \quad (41)$$

$$B_z = -\frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{a \cdot \sin \varphi \cdot (y - a \sin \varphi) + a \cdot \cos \varphi \cdot (x - a \cdot \cos \varphi)}{(\sqrt{(x - a \cdot \cos \varphi)^2 + (y - a \cdot \sin \varphi)^2 + z^2})^3} d\varphi, \quad (42)$$

В выражениях (40)-(42) произвольные значения координат точки наблюдения x, y, z играют роль параметров.

Наиболее простые и наглядные результаты получаются для точки наблюдения, расположенной на оси аппликат ($x = 0, y = 0, z$ - произвольное значение):

$$B_x = 0, \quad B_y = 0, \quad B_z = \frac{\mu_0 I}{2a} \cdot \left(1 + \frac{z^2}{a^2}\right)^{-3/2}. \quad (43)$$

В центре проводящего кругового кольца проекция вектора магнитной индукции на ось аппликат принимает значение:

$$B_z(0,0,0) = \frac{\mu_0 I}{2a}. \quad (44)$$

Эти результаты могут быть получены при непосредственном рассмотрении частного случая задачи.

Введём в рассмотрение безразмерный (относительный) вектор $\vec{b} = \vec{B}(x, y, z) / B_z(0,0,0)$. С помощью выражений (40)-(42) рассчитаем проекции вектора \vec{b} в некоторых характерных точках пространства. Так для точки наблюдения с декартовыми координатами $\{a, a, a\}$ получаем результаты: $b_x = 0.0496, b_y = 0.0496, b_z = 0.0212$. Для точки наблюдения «повыше» (координаты $\{a, a, 10a\}$) соответственно

получаем: $b_x = 6.972 \cdot 10^{-5}$, $b_y = 6.972 \cdot 10^{-5}$, $b_z = 4.647 \cdot 10^{-4}$. Компоненты уменьшились по величине, появились проекции на оси абсцисс и ординат.

Если воспользоваться тем, что рассматриваемая система токов обладает осевой симметрией, можно систему координат расположить специальным образом: пусть точка наблюдения M расположена в плоскости $y=0$. С помощью компьютерной системы символьных вычислений можно получить аналитические зависимости для расчёта выражений (40)-(42) как функций координат x и z :

$$B_x = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi} \cdot \frac{z}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + z^2}} \cdot \left(-K(\xi) + \frac{x^2 + z^2 + a^2}{(a-x)^2 + z^2} \cdot E(\xi) \right),$$

$$B_y = 0,$$

$$B_z = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + z^2}} \cdot \left(+K(\xi) + \frac{a^2 - x^2 - z^2}{(a-x)^2 + z^2} \cdot E(\xi) \right), \quad (45)$$

$$\xi = 2 \sqrt{\frac{a \cdot x}{(a+x)^2 + z^2}}, \quad K(\xi) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-\xi^2 t^2} \sqrt{1-t^2}},$$

$$E(\xi) = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-\xi^2 t^2}}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

В соотношениях (45) выражения $K(\xi)$ и $E(\xi)$ - полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно. В компьютерных системах символьных вычислений и в системах, ориентированных на численные расчёты, как правило, содержатся операции вычисления описанных функций.

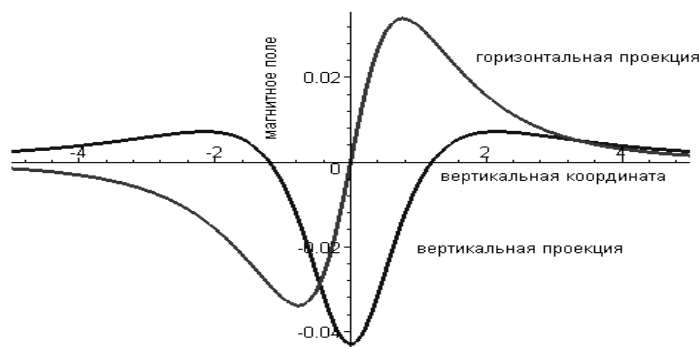


Рис.13. Магнитное поле кругового тока.
Распределение проекций магнитного поля вдоль
вертикальной координаты ($I = 1$, $a = 1$, $x = 2$, $\mu_0 = 1$)

С помощью полученных выражений (45) несложно рассчитать составляющие вектора магнитной индукции при переходе в произвольную систему координат.

На рис. 13 показаны результаты расчета (в относительных единицах) горизонтальной и вертикальной составляющих вектора магнитной индукции кругового кольца с током в зависимости от вертикальной координаты точки наблюдения (горизонтальная координата точки наблюдения была фиксирована).

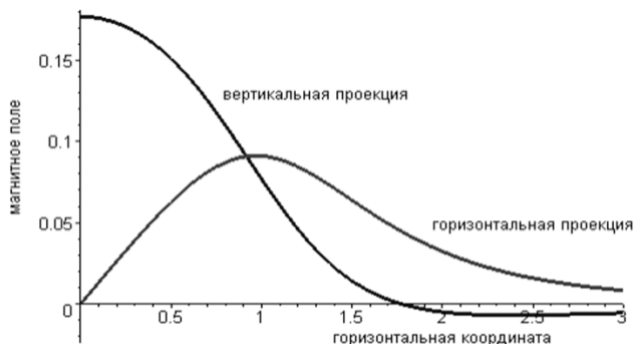


Рис.14. Магнитное поле кругового тока.
Распределение проекций магнитного поля вдоль горизонтальной координаты
 ($a=1, I=1, \mu_0=1, z=1,0$).

На рисунке 14 приведены аналогичные результаты расчетов составляющих вектора магнитной индукции поля кругового кольца с током в зависимости от горизонтальной координаты x (вертикальная координата точки наблюдения фиксирована).

Силовые линии векторного поля магнитной индукции в рассматриваемом случае позволяют сформировать наглядное представление о характере магнитного поля, образованного плоским круговым контуром с током. На прилагаемом ниже рисунке 15 толстый вертикальный отрезок прямой линии представляет собой разрез кольца с

током, в нижнем сечении этого кольца ток течёт «от нас», в верхнем сечении кольца – «на нас», силовые линии являются замкнутыми, картина силовых линий обладает очевидной симметрией.

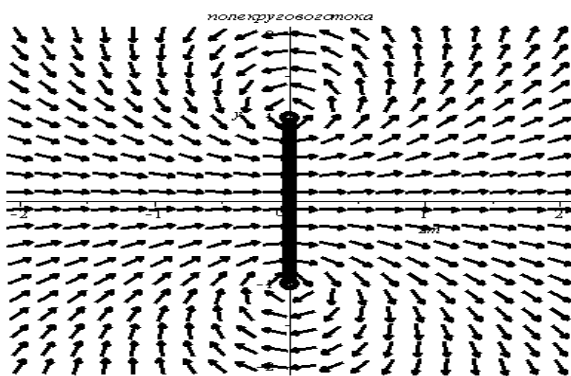


Рис. 15. Магнитное поле кругового тока.

Обратим внимание читателя на то, что только по расположению силовых линий магнитного поля трудно судить о величине магнитной индукции в рассматриваемой точке пространства.

10. Магнитное поле колец Гельмгольца.

Кольца Гельмгольца (катушки Гельмгольца, см. рис.16) — две соосно расположенные одинаковые многovitковые катушки, расстояние между центрами которых равно их среднему радиусу. Кольца названы по имени немецкого физика Германа Гельмгольца, впервые их применившего.

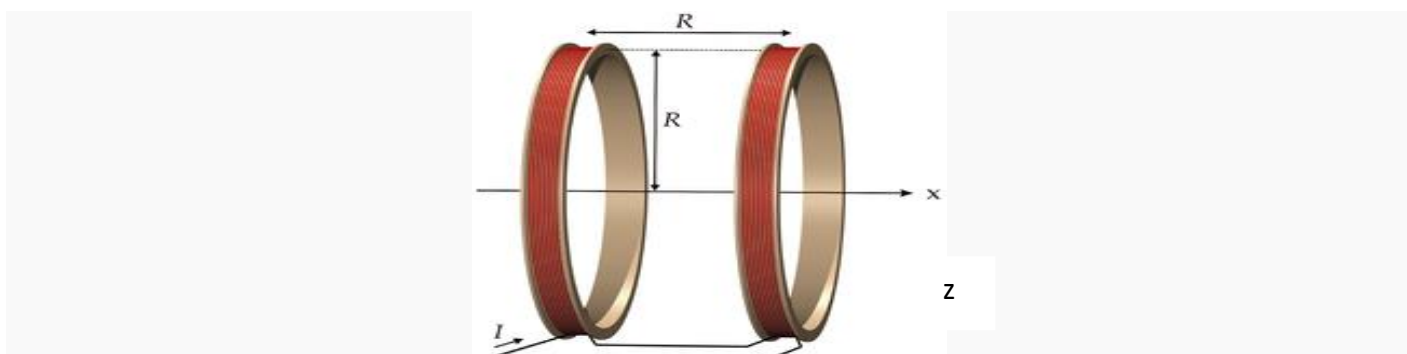


Рис. 16. Катушки Гельмгольца.

Катушки Гельмгольца используются для получения постоянного, переменного, или импульсного магнитного поля с зоной однородности, которое обычно используется в экспериментах, а также для калибровки датчиков магнитной индукции, намагничивания и размагничивания постоянных магнитов, размагничивания стальных заготовок, деталей и инструментов.

Зависимость для модуля вектора \vec{B} магнитной индукции поля, созданного током одного витка в одной катушке, на оси колец на расстоянии z от центра кольца, например, левой катушки, имеет вид:

$$B = \frac{\mu_0}{2} \frac{IR^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (46)$$

Здесь μ_0 - магнитная постоянная, I - ток через катушку, R - радиус катушки, z - расстояние по оси катушек. Это соотношение следует из зависимости (43). Катушки состоят из N витков каждая. Тогда, с учётом тока, формирующего магнитное поле, и принципа суперпозиции, выражение для модуля вектора \vec{B} магнитной индукции поля, созданного током всей катушки, на оси колец на расстоянии z от центра кольца принимает вид:

$$B = \frac{\mu_0}{2} \frac{NIR^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Направление вектора \vec{B} на оси колец совпадает с направлением оси z . Принимая во внимание, что расстояние z по оси от катушки до центра системы равно $R/2$, из предыдущего соотношения получаем:

$$B_z = \frac{\mu_0}{2} \frac{NIR^2}{(R^2 + (R/2)^2)^{3/2}}.$$

Заметим, что вектор \vec{B} (с учётом указанного на рисунке направления тока в катушках) полей, созданных токами обеих катушек на оси системы, направлен в одну сторону (в направлении оси z). После преобразований окончательно получаем для магнитной индукции в начале координат (центр симметрии конструкции катушек):

$$B_z = \left(\frac{4}{5}\right)^{3/2} \frac{\mu_0 NI}{R}. \quad (47)$$

Заметим, что именно соотношение (47) используется на практике для калибровки измерителей магнитной индукции (тесламетров).

Располагая зависимостями для соответствующих проекций на оси координат вектора магнитной индукции магнитного поля плоского кругового тока (предыдущий раздел описания лабораторной работы), нетрудно получить необходимые зависимости и для рассматриваемой системы «кольца Гельмгольца» и построить картину силовых линий магнитного поля (рис. 17).

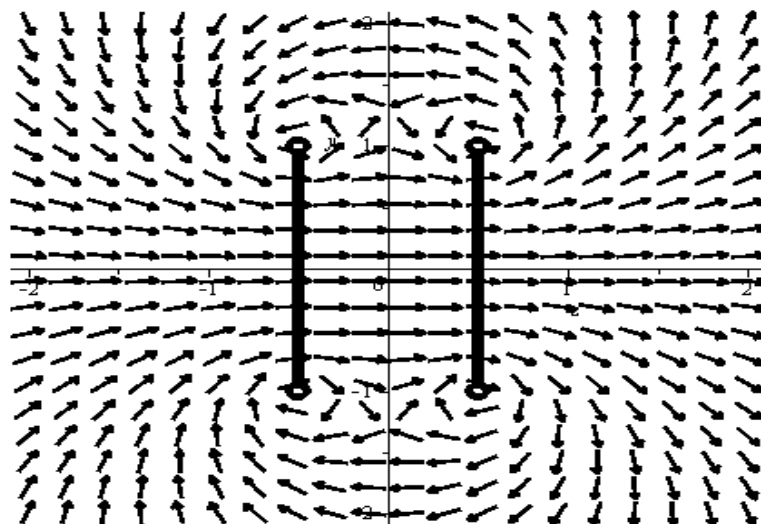


Рис. 17. Магнитное поле катушек Гельмгольца.

По картине силовых линий (ось симметрии системы) невозможно оценить преимущества колец Гельмгольца как экспериментальной установки по сравнению с одиночным плоским круговым контуром с током – неравномерность поля вдоль оси z просто не видна. На приведённом ниже рисунке 18 показано сравнение величины магнитной индукции на оси симметрии системы для одиночного кольца (нижняя кривая) и для колец Гельмгольца (верхняя кривая) в относительных величинах. По оси абсцисс на этом рисунке отложено расстояние от центра симметрии системы, делённое на радиус колец.

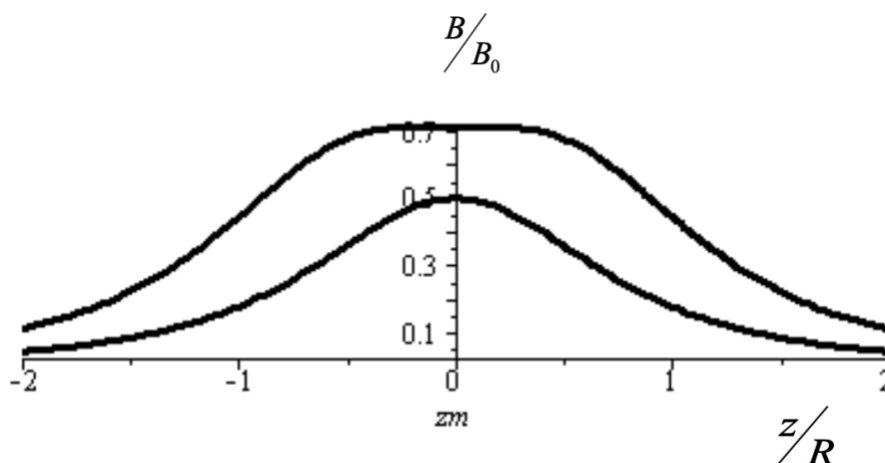


Рис. 18. Иллюстрация полей одиночного кольца и колец Гельмгольца.

Здесь следует обратить внимание на то, что «зона» практической однородности магнитного поля на оси симметрии колец Гельмгольца существенно больше, чем в случае использования одиночного кругового контура с током.

11. Измеритель магнитной индукции на основе датчика Холла (тесламетр).

Отклонение электронов (и других заряженных частиц) в магнитных полях широко используется в технике (ускорители заряженных частиц, электронные микроскопы, измерительные приборы для изучения колебательных и других быстропротекающих процессов, телевизоры, магнитные ловушки для заряженных частиц и т.п.).

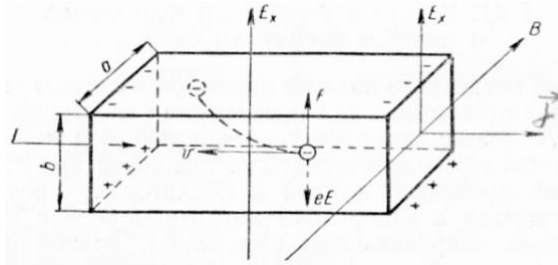


Рис.19. Схема образования разности потенциалов $\Delta\varphi$.

Магнитное поле действует также и на те электроны внутри проводника, упорядоченное движение которых образует электрический ток. Оказывается, что в металле или полупроводнике с током, помещённом в магнитное поле, перпендикулярное вектору плотности тока, возникает поперечное электрическое поле и разность потенциалов (эффект Холла). Причиной явления Холла является отклонение электронов, движущихся в магнитном поле под действием силы Лоренца ($\vec{F}_L = e[\vec{v}, \vec{B}]$), см. рис. 19.

Можно показать, равновесная разность потенциалов в эффекте Холла

$$\Delta\varphi = U_x = \varphi_1 - \varphi_2 = E_x b = \frac{1}{ne} \frac{IB}{a},$$

а напряжённость \vec{E}_x поперечного электрического поля

$$\vec{E}_x = R[\vec{B}, \vec{j}],$$

где \vec{j} - вектор плотности тока, I - сила тока, a - линейный размер металла или полупроводника в направлении вектора \vec{B} . Величина $R = \frac{1}{ne}$ - называется постоянной Холла.

Точный расчёт, учитывающий взаимодействие электронов с кристаллической решёткой проводника, даёт безразмерный поправочный множитель A :

$$R = A \frac{1}{ne},$$

где $A \approx 1$ для металлов; у полупроводников в зависимости от структуры решётки A имеет различные значения (1,11-1,93). Знак постоянной Холла совпадает со знаком заряда носителей тока. У некоторых металлов и полупроводников с дырочной проводимостью наблюдается противоположный знак разности потенциалов: верхняя поверхность (см. рис.) заряжается положительно, а нижняя - отрицательно (аномальный эффект Холла). Поэтому измерение постоянной Холла позволяет определить характер проводимости полупроводника (электронный или дырочный), а также концентрацию и подвижность носителей тока.

Эффект Холла широко используется для измерительных целей. Холловские датчики имеют два электрода для подводки тока, два - для измерения поперечной разности потенциалов. При помощи этих датчиков можно измерить любые величины, влияющие на холловскую разность потенциалов (сила тока через датчик, индукция и напряжённость внешнего магнитного поля, ориентация датчика относительно этого поля и т. д.). Кроме того, эффект Холла используется во многих электро- и радиотехнических устройствах (преобразование токов, модуляция электрических колебаний, запись звуков, усиление постоянного и переменного токов и т. д.).

Экспериментальная часть.

Приборы, используемые для измерения составляющих магнитного поля Земли в точке проведения эксперимента, изображены на рисунке 20, а также представлены на мониторе компьютера рабочего стола студента.



Рис. 20. Установка для измерения составляющих магнитного поля Земли.

Основу экспериментальной установки составляют катушки Гельмгольца, т.е. два многовитковых круговых контура катушек диаметром около 400 мм, центры которых расположены на расстоянии 200 мм на общей горизонтальной оси.

Для создания на оси катушек интенсивного достаточно однородного магнитного поля направление намотки витков изолированного провода катушек должно совпадать (это требование выполняется конструктивно), а конец намотки одной катушки должен быть соединен проводником с началом намотки другой катушки (последовательное «согласное» включение). Тем самым через каждую катушку протекает одинаковый ток.

Питание катушек осуществляется от источника постоянного напряжения (*Netzgerät*). Величина выходного напряжения устанавливается по положению регулятора напряжения V источника питания в пределах (0-15) В.

Максимальный рекомендуемый ток через катушки составляет 4А, и длительное протекание такого тока через катушки приводит к заметному нагреву их, поэтому режим работы с максимальным током должен быть непродолжительным (менее 1 мин.). Регулятором A источника питания можно установить любой ток в пределах (0-6) А, и при достижении установленного тока начинает светиться индикатор красного цвета над регулятором тока A , что напоминает о необходимости отключения максимального тока через катушки.

Направление магнитного поля Земли, в частности его горизонтальной составляющей $\vec{B}_3^{гор}$, можно определить с помощью компаса, стрелка которого располагается в свободном состоянии по направлению магнитного меридиана в месте измерения, если место измерения находится на открытой местности, а не внутри здания железобетонной конструкции вблизи объектов, в составе которых есть массивные стальные детали.

В настоящей лабораторной работе конструкция компаса несколько изменена, и магнитная стрелка может вращаться как относительно вертикальной оси (обычный компас), так и относительно горизонтальной оси, что используется для оценки наклона вектора \vec{B}_3 . В описании лабораторной работы такой прибор называется магнитометром. Цена деления обеих шкал магнитометра составляет 2° .

Перед началом выполнения измерений инженер лаборатории может показать, как отличаются направления горизонтальной составляющей локального магнитного поля в различных местах лаборатории. При проведении измерений магнитометр целесообразно располагать там, где направление «север-юг», регистрируемое стрелкой магнитометра, незначительно отличается от географического направления «север-юг», и таким образом мы находим место, где влияние стальных элементов конструкций незначительно. Полагаться на сведения из смартфонов не имеет смысла, так как определение направления «север-юг» а смартфоне осуществляется программой, использующей сигнал обычного компаса.

Магнитное поле Земли в точке измерения представляет собой векторную сумму полей собственно Земли и наведённого дополнительного внешнего поля различных «мешающих» факторов. Горизонтальная составляющая магнитного поля Земли \vec{B}_3^{GOP} , например в районе Москвы, составляет величину порядка 20-50 мкТл. Магнитометр позволяет оценить направление вектора \vec{B}_3^{GOP} магнитного поля Земли, но для измерения величины этого поля нужны специальные приборы и приёмы. Входящий в комплект лабораторной установки измеритель магнитной индукции (*Teslameter*) с датчиком Холла имеет пределы измерения 2000, 200 и 20 мТл, что не позволяет достоверно измерить локальное магнитное поле в районе Москвы, так как величина этого поля меньше чувствительности тесламетра на нижнем пределе измерений. Следует заметить, что на лицевой панели тесламетра (рядом с дисплеем) единицы измерения магнитной индукции обозначены изготовителем прибора символом мТ, а в России эти единицы имеют обозначение мТл.

Предлагается следующий метод измерения величины горизонтальной составляющей магнитного поля Земли методом наложения известного внешнего магнитного поля. В результате проведения эксперимента должны быть построены векторные диаграммы по уравнению $\vec{B}_\Sigma^{GOP} = \vec{B}_3^{GOP} + \vec{B}_r$, в которых известно направление вектора \vec{B}_3^{GOP} , определяемое магнитометром, а также известны направление и величина накладываемого внешнего поля \vec{B}_r , которым является поле катушек Гельмгольца. Все величины, необходимые для построения векторной диаграммы, определяются при проведении эксперимента.

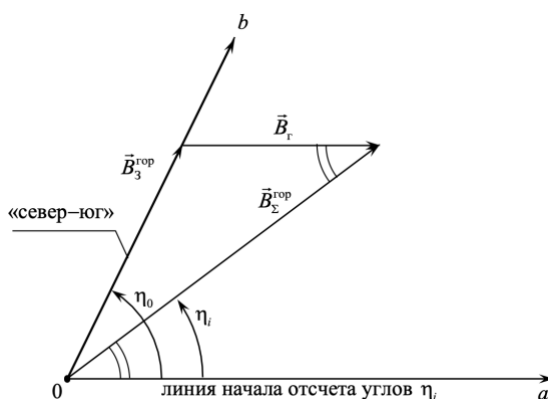


Рис.21 Общий вид векторной диаграммы, построенной по уравнению $\vec{B}_\Sigma^{GOP} = \vec{B}_3^{GOP} + \vec{B}_r$.

В опыте по определению горизонтальной составляющей магнитного поля Земли \vec{B}_3^{GOP} в месте исследования центр магнитной стрелки с вертикальной осью вращения должен быть совмещён с центром катушек Гельмгольца, магнитное поле которых должно быть известно. Величина этого поля может быть рассчитана по формуле (47) теоретической части, но при её выводе были сделаны некоторые допущения, и поэтому экспериментальное измерение индукции магнитного поля катушек Гельмгольца с помощью тесламетра является более достоверным и предпочтительным. Датчиком измерителя магнитной индукции (тесламетра) является полупроводниковый холловский датчик, расположенный на конце щупа. Принцип действия этого датчика изложен в теоретической части работы. Датчик совместно с блоком измерения определяет осевую составляющую магнитного поля катушек, направленную вдоль оси щупа, и, в связи с этим имеет название «аксиальный датчик».

При работе с малыми полями катушек Гельмгольца тесламетр имеет большую относительную приборную погрешность, с другой стороны, при больших токах катушек (более 0,3 А) возрастает погрешность определения угла между осью катушек и направлением результирующего отклонения стрелки магнитометра.

Измерение тока I_r катушек осуществляется цифровым мультиметром 2010 или ему подобным на пределе 200 мА, а регулирование тока I_r производится проволочным реостатом и (или) регулятором напряжения источника питания V.

Угловые положения стрелки магнитометра (магнитного компаса) фиксируются по круговой шкале с точностью до 1,0 градуса, которая должна быть установлена горизонтально, что предусмотрено конструкцией магнитометра.

Порядок выполнения эксперимента для построения векторной диаграммы по уравнению $\vec{B}_\Sigma^{GOP} = \vec{B}_3^{GOP} + \vec{B}_r$

1) Поставить магнитометр в центр катушек Гельмгольца, убедиться, что положение его стрелки примерно совпадает с направлением магнитного меридиана Земли (направление «север-юг») в месте проведения опыта. При этом стрелка может совершать свободные колебания в горизонтальной плоскости, а ось катушек Гельмгольца располагается параллельно длинной стороне рабочего стола.

2) Проверить с помощью инженера лаборатории правильность электрических соединений в соответствии с рисунком 20 или картинкой дисплея компьютера. Полярность подключения источника питания к цепи катушек может быть произвольной.

3) Вывести регулятор напряжения источника питания V против часовой стрелки до крайнего положения.

4) Вставить вилки источника питания и тесламетра в розетки 220V, включить в сеть источник питания и тесламетр нажатием клавиш включения, расположенных на задних стенках приборов. Показателем включения приборов будет свечение зелёного индикатора на источнике питания и свечение дисплея тесламетра.

5) Переставить магнитометр на свободное место.

6) Щуп аксиального датчика расположить горизонтально с наименьшим отклонением от оси симметрии катушек Гельмгольца так, чтобы его свободный конец (место нахождения датчика Холла) располагался посередине между катушками.

7) Переключатель вида поля в центре лицевой панели тесламетра поставить в положение «Direct». Скомпенсировать имеющуюся осевую составляющую магнитного

поля (при отсутствии тока I_r в катушках) с помощью регулятора **О** тесламетра так, чтобы на цифровом дисплее тесламетра высвечивались нули (возможно скачкообразное изменение на единицу младшего разряда показаний дисплея). В случае, если не удаётся установить нули на дисплее тесламетра при отсутствии тока в катушках, обратиться к инженеру лаборатории.

8) Включить питание мультиметра кнопкой POWER.

Измерение величины индукции B_r магнитного поля на оси симметрии катушек для диапазона токов не более 200 мА (таблица 1).

9) Перед началом измерений установить регулятором тока **А** источника питания значение тока 4 А.

10) **ВНИМАНИЕ!** Ток I_r катушек измеряется мультиметром. При измерении токов до 200 мА дисковый переключатель мультиметра ставится в положение 200 мА шкалы **А**, а вилка провода, идущего от реостата, в гнездо **mA**.

11) Изменяя с помощью напряжения источника питания **V** и/или реостата ток I_r катушек, вносить в таблицу 1 показания дисплея B_r тесламетра (значения брать без учета знака!), начиная со значения токов I_r катушек 60 мА. Значения величины поля B_r при токах меньше 50 мА будут получены после проведения процедуры калибровка. При каждом измерении показания тесламетра 2-3 раза в секунду могут изменяться на 2-3 единицы младшего разряда. В таблицу вносится среднее значение. Для повышения точности измерений желателен перед каждым измерением откорректировать нулевые показания тесламетра при отсутствии тока в катушках. С этой целью можно вынуть любую вилку из гнезда источника питания. Для продолжения измерений эту вилку поставить на прежнее место, чтобы замкнуть цепь питания катушек.

Таблица 1.

$I_r, \text{ мА}$	5	10	15	20	30	40	50	60	100	120	150	190	3,7– 4,0 А
$B_r, \text{ мТл}$													$\eta_0 =$
$\eta_i, \text{ град}$													
$\eta_0 - \eta_i, \text{ град}$													
$B_3^{GOP}, \text{ мкТл}$													

12) Стойка со щупом отодвигается на свободное место, а тесламетр можно выключить.

13) Выключить ток катушек, повернув против часовой стрелки регулятор напряжения **V** источника питания до крайнего положения.

Определение горизонтальной составляющей вектора \vec{B}_3^{GOP} .

Направление вектора \vec{B}_3^{GOP} находится по положению стрелки магнитометра, помещённого в центр катушек Гельмгольца. Предварительно надо определить направление линии начала отсчёта углов отклонения стрелки. Это выполняется следующим образом.

1) Снять, если необходимо, нижнюю перемычку, соединяющую катушки Гельмгольца.

2) Поставить магнитометр в зону однородности магнитного поля вдоль оси катушек Гельмгольца. Центр стрелки магнитометра с вертикальным положением оси вращения должен располагаться максимально близко к центру катушек Гельмгольца там, где располагался конец щупа в предыдущем эксперименте.

3) Вилку проводника из гнезда **mA** мультиметра переставить дополнительно в гнездо вилки **COM**, специальная конструкция которой позволяет это сделать.

4) Плавно увеличивая ток через катушки с помощью реостата и/или регулятора напряжения источника питания **V**, следим за отклонением стрелки магнитометра. Когда при увеличении тока не происходит увеличение угла отклонения стрелки - фиксируем это максимальный угол отклонения. Для удобства работы желательно, чтобы отклонение стрелки происходило по направлению вращения часовой стрелки от начального положения. Это необходимо для того, чтобы получаемая векторная диаграмма совпадала с рисунком 21.

5) После успокоения колебаний стрелки, аккуратно поворачиваем шкалу магнитометра так, чтобы линия $0-0^\circ$ круговой шкалы совпала с отклонённым положением стрелки. Это крайнее положение стрелки совпадает с осью поля катушек Гельмгольца, поскольку $B_{Г\text{max}} \gg B_3^{TOP}$. На рис.21 такое направление принято за горизонтальное. Это направление будем считать за начало отсчёта углов η_i стрелки в зависимости от тока через катушки Гельмгольца в дальнейшей работе. Очевидно, что при любом токе через катушки это направление будет сохраняться, и этот факт должен учитываться в дальнейшем при построении векторной диаграммы. Тем самым начало отсчёта углов η_i жёстко привязано к конструкции установки.

6) Убрать напряжение источника питания, повернув рукоятку **V** против часовой стрелки до крайнего положения. Вернуть вилку из гнезда **COM**, вставленную в него из гнезда **mA** (см. пункт 3), на своё место в гнездо **mA** мультиметра.

7) Стрелка магнитометра после успокоения колебаний вернулась в положение равновесия, которое определяет угол η_0 при отсутствии тока в катушках, и этот угол следует занести в таблицу 1. В зависимости от местоположения измерительной установки угол η_0 может быть как больше, так и меньше 90° . Таким образом определено направление составляющей вектора \vec{B}_3^{TOP} , необходимое для построения векторной диаграммы.

Измерение углов η_i отклонения стрелки магнитометра при токах, указанных в таблице 1.

1) При каждой установке токов от 5 до 190 *mA*, с помощью реостата и/или регулятора напряжения источника питания **V**, измерить угловое положение η_i стрелки магнитометра. Для уменьшения погрешности измерения углов η_i можно слегка пощёлкивать по стойке магнитометра и фиксировать угловое положение обоих концов стрелки. В таблицу 1 вносятся средние значения углов η_i .

2) Убрать напряжение источника питания, повернув рукоятку **V** против часовой стрелки до крайнего положения.

Калибровка установки.

Следует заметить, что для уменьшения погрешности результатов измерений целесообразно иметь соизмеримые значения B_3^{TOP} и B_T . Для этого нужно иметь достоверные значения величин B_T магнитного поля катушек для токов $I_T < 60$ мА, а этого можно достичь, учитывая линейные зависимости $B_T(I_T)$ при любых токах и осуществив для этого калибровку установки.

В теоретической части работы было показано, что магнитное поле катушек Гельмгольца пропорционально току I_T через катушки. Соотношение (47) получено с некоторыми допущениями и коэффициент пропорциональности k в зависимости $B_T = k I_T$ для каждой установки имеет своё значение. Учитывая постоянство этого коэффициента для различных токов I_T , можно рассчитать величину магнитного поля катушек для малых токов I_T ($I_T < 60$ мА), используя тесламетр при работе на пределе 20 мТл. В разделе «Измерение величины индукции B_T магнитного поля на оси симметрии катушек Гельмгольца для диапазона токов < 190 мА, можно было обнаружить невозможность получения достоверных величин поля при токах 5, 10, 15, 20, 30, 40, 50 мА. Более точные значения индукции B_T при этих малых токах можно получить, используя приём калибровки, который заключается в выполнении следующих действий.

Используя данные таблицы 1 построить на миллиметровой бумаге график зависимости $B_T(I_T)$ и, проведя через точки графика осреднённую прямую линию, определить коэффициент пропорциональности $k = B_T / I_T$ с точностью до одного знака после запятой.

Рассчитать для токов I_T с учётом полученного коэффициента k для токов 5, 10, 15, 20, 30, 40, 50 мА, значения индукции B_T магнитного поля и занести их в таблицу. Соответствующие этим токам углы отклонения η_i стрелки магнитометра сохраняют своё значение. Теперь, используя данные таблицы, можно приступить к построению векторной диаграммы.

Построение векторной диаграммы.

Построение векторной диаграммы для оценки величины индукции горизонтальной составляющей магнитного поля Земли рекомендуется производить в следующем порядке.

1. Чертёж диаграммы выполнять в формате А4.
2. Необходимо выбрать масштаб изображения длины векторов магнитной индукции, например, 10 см длины отрезка на чертеже соответствуют индукции поля, отмеченной в таблице 1, для токов через катушки Гельмгольца 30 мА.
3. Полюс диаграммы располагается в нижней левой части чертежа (точка 0). Из этой точки в горизонтальном направлении изображается луч 0а, от направления которого отсчитываются углы η_i .
4. Из полюса 0 проводится второй луч 0 в под углом η_0 к лучу 0а. По этому направлению располагается стрелка магнитометра при отсутствии тока в катушках (начальное положение стрелки). Направление луча 0в совпадает с направлением «север – юг» в месте проведения эксперимента.
5. Затем для выбранного тока катушек, например 30 мА, и угла η_i , соответствующего этому току, через полюс диаграммы проводится ещё один луч 0с.

6. Далее на луче Oa откладывается в масштабе отрезок, соответствующий величине индукции поля B_r при выбранном токе (в данном примере 30 мА), и через конец этого отрезка проводится линия, параллельная лучу Ov («север – юг»), до пересечения с лучом Oc (точка D). Эта точка является концом векторов \vec{B}_r и \vec{B}_Σ^{GOP} . Далее через точку D проводится горизонталь до пересечения с лучом Ov , и полученная точка A определяет конец вектора \vec{B}_3^{GOP} . Зная масштаб построения, определяем величину вектора \vec{B}_3^{GOP} и заносим в таблицу 1.

7. Аналогичные построения делаются на векторной диаграмме для токов 40 мА и 20 мА (построения можно сделать на векторной диаграмме рассмотренного примера для тока $I_r = 30 \text{ мА}$). Определяемые при этом значения величин B_3^{GOP} заносятся в таблицу 1. Значения величин B_3^{GOP} для выбранного диапазона могут различаться по причине погрешностей измерений (в основном углов η_i), и поэтому в качестве оценки по серии значений B_3^{GOP} определяем среднее значение горизонтальной составляющей B_3^{GOP} магнитного поля Земли в месте измерения.

8. В заключение отметим, что в описанной выше части работы величина вектора \vec{B}_3^{GOP} была определена на диаграмме с помощью выбранного масштаба, но эта величина может быть вычислена как сторона треугольника OAD с применением теоремы синусов. Тогда

$$B_3^{GOP} = B_r \frac{\sin(\eta_i)}{\sin(\eta_0 - \eta_i)}$$

для любого из выбранных токов через катушки (20 мА , 30 мА , 40 мА и т.д.).

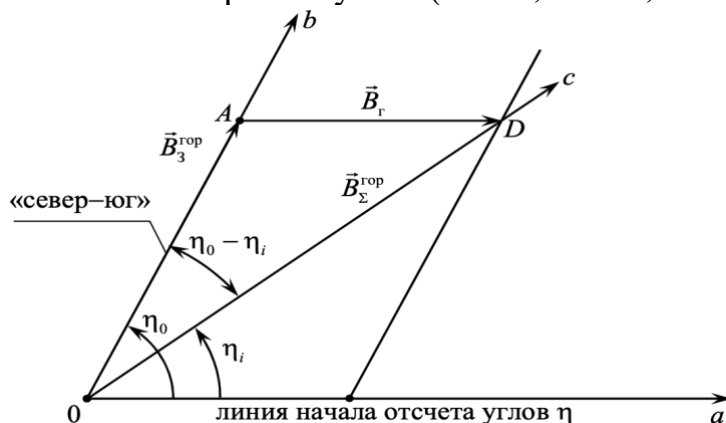


Рис. 22. Пример построения векторной диаграммы, построенной по уравнению $\vec{B}_\Sigma^{GOP} = \vec{B}_3^{GOP} + \vec{B}_r$ для токов через катушки Гельмгольца 30 мА .

Для вычисления полной величины индукции магнитного поля Земли надо найти ещё и её вертикальную составляющую, порядок определения которой рассмотрен в следующем разделе.

Порядок определения вертикальной составляющей магнитного поля Земли.

1) Поставить магнитометр на свободное место, желательно вдали от приборов, содержащих металлические элементы. Убедиться, что направление «север-юг» близко к тому, которое имело место при определении горизонтальной составляющей.

2) Поворачивая горизонтальную рамку магнитометра на 90 градусов вокруг горизонтальной оси, совпадающей с направлением «север-юг», добиваемся лёгкого вращения стрелки вокруг горизонтальной оси.

3) По круговой шкале фиксируем углы α_1 и α_2 наклона вектора индукции магнитного поля относительно горизонтального направления.

4) Углы α_1 и α_2 измерены по положениям обоих концов магнитной стрелки. Истинным углом наклона считаем угол $\alpha_{\text{ср}} = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$. Значение $\alpha_{\text{ср}}$ должно находиться в диапазоне $60-80^\circ$. Однако, конструктивные особенности лаборатории не позволяют обнаружить истинный угол отклонения, поэтому для расчетов необходимо брать значение $\alpha_{\text{ср}} = 78^\circ$ (которое можно проверить магнитометром вне стен университета). Тогда вертикальная составляющая магнитного поля Земли будет равна: $B_3^{\text{вепт}} = B_3^{\text{гоп}} \cdot \text{tg} \alpha$, а полное поле $B_3 = \frac{B_3^{\text{гоп}}}{\cos \alpha}$.

Заметим, что величина индукции полного магнитного поля Земли существенно больше найденной горизонтальной составляющей $B_3^{\text{гоп}}$, что обусловлено структурой магнитного поля Земли в северном полушарии.

Заключение.

Аккуратно выполненные измерения с соблюдением рекомендаций по проведению эксперимента дают хорошее совпадение измеренного угла наклона и рассчитанного по рассмотренной модели магнитного диполя для широты г. Москвы ($\alpha = 74^\circ \div 78^\circ$).

Проблема магнитной девиации не позволяет говорить о хорошем совпадении углов наклона, найденных экспериментально и рассчитанных по рассмотренной теоретической модели, однако определяемая в эксперименте величина магнитной индукции в районе г. Москвы ($20 \div 50 \text{ мкТл}$) совпадает со значениями, полученными иными методами.

Контрольные вопросы

1. В чём заключается физический смысл теоремы Гаусса для магнитного поля?
2. Что такое магнитный диполь? Укажите реальные тела, которые можно называть магнитными диполями.
3. Почему определение момента магнитного диполя аналогичное определению момента электрического диполя является некорректным?
4. В какой области пространства около магнитного диполя неоднородность магнитного поля наибольшая? Какой физической величиной характеризуется эта неоднородность?
5. Известны ли Вам планеты Солнечной системы или их спутники, обладающие магнитным моментом?
6. Как называется явление локального несовпадения направления «север-юг» и горизонтальной составляющей магнитного поля Земли?
7. Измерение индукции магнитного поля в центре катушек Гельмгольца тесламетром и расчёт по зависимости (47) методических указаний дают разные числовые значения. Какова причина систематической погрешности?
8. По какой причине при анализе магнитного поля Земли используют магнитные координаты? Как эти координаты выбираются?
9. Какие физические принципы используют в технике измерения локального магнитного поля?

10. Что такое радиационные пояса Земли? Какую роль они играют в процессах взаимодействия космического излучения и живой природы Земли?
11. Влияет ли работа электрических машин (трансформаторов, электродвигателей) на процесс измерения магнитного поля Земли с помощью используемой лабораторной установки?

Литература

Макаров А.М., Лунёва Л.А., Макаров К.А. Теория и практика классической электродинамики. - М.: URSS. 2013. -767 с. ил.

Мартинсон Л.К., Морозов А.Н., Смирнов Е.В. Электромагнитное поле. М.: Изд-во МГТУ им. Баумана, 2013.

Савельев И.В. Курс общей физики. Т. 2. Электричество. Колебания и волны. Волновая оптика. М.: Лань, 2007.

Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. 3. Электричество. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006.