МГТУ имени Н. Э. Баумана

Н.А. ГЛАДКОВ, М.А. ЯКОВЛЕВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ТЕЛ

Методические указания к лабораторной работе М-4 по курсу общей физики.
Под редакцией А. И. Савельевой.

ВВЕДЕНИЕ

Цель работы - изучение законов вращательного движения и определение моментов инерции твердых тел.

Вращательное движение твердого тела может происходить как вокруг неподвижной точки (сферическое движение), так и вокруг неподвижной оси. В первом случае закон изменения момента импульса тела представляется в виде векторного уравнения

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}\ , \qquad (1)$$

где $\vec{L}$ - момент импульса тела, равный геометрической сумме моментов импульсов всех частиц $\vec{L}_i$ этого тела относительно неподвижной точки О, т.е.

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i\ , \qquad (2)$$

$\vec{M}$ - результирующий момент всех внешних сил относительно, той же точки О.

Закон изменения момента импульса тела относительно оси, например оси Z, записывается в виде алгебраического уравнения

$$\frac{dL_Z}{dt} = M_Z\ , \qquad (3)$$

где L_Z и M_Z проекции векторов $\vec{L}$ и $\vec{M}$ уравнения (1) на ось Z. Момент импульса тела относительно оси Z найдем, если спроецируем (2) на ось Z:

$$L_Z = \sum_{i=1}^{n} L_{iZ}\ .$$

После суммирования и преобразований приходим к соотношению

$$L_Z = J_Z \omega_Z\ , \qquad (4)$$

где ω_Z - угловая скорость вращения тела относительно оси Z; J_Z - момент инерции тела относительно той же оси. После подстановки (4) в уравнение (3) приходим к основному уравнению динамики вращательного движения

$$\frac{d\left(J_Z \omega_Z\right)}{dt} = M_Z\ .$$

Так как для твердого тела $J_Z=const$, то

$$J_Z \frac{d\omega_Z}{dt} = M_Z \qquad (5)$$

или

$$J_Z \varepsilon_Z = M_Z\ , \qquad (6)$$

где

$$\varepsilon_Z = \frac{d\omega_Z}{dt}$$

- угловое ускорение тела относительно оси Z.

Уравнения (5), (6) - уравнения динамики вращательного движения твердого тела вокруг оси Z.

Момент инерции тела К, например относительно оси Z, вычисляется по формуле

$$J_Z = \int\limits_{(K)} R^2 dm\,, \tag{7}$$

где dm - элемент массы тела; R - расстояние от этого элемента до оси Z. Единица измерения момента инерции в СИ [J]=кг·м^2. Формулу (7) можно использовать для теоретического определения момента инерции тела. Моменты инерции тела относительно параллельных осей Z и Z_C (ось Z_C проводится через точку С - центр масс или инерции тела) связаны формулой Штейнера

$$J_Z = J_{ZC} + md^2\,, \tag{8}$$

где J_{ZC} - момент инерции тела относительно оси Z_C;
m - масса тела;
d - расстояние между осями Z и Z_C.

Момент инерции любого тела зависит также от ориентации оси. Например, моменты инерции цилиндра длиной l и радиусом R (R>>l) относительно прямоугольных осей X_C, $У_C$, Z_C, проходящих через точку С - его центр масс (при условии, что ось Z_C совпадает с осью цилиндра), не одинаковы

$$J_{ZC} = \frac{1}{2}mR^2\,; \quad J_{XC} = J_{YC} = \frac{1}{12}ml^2$$

Однако для любого тела существует инвариантная характеристика, не зависящая от направления осей и определяющая инерционные свойства тела при вращательном движении. Она подобна массе тела, определяющей его инерционные свойства и являющейся инвариантной характеристикой тела при поступательном движении. При вращении же тела инвариантной, характеристикой является *тензор инерции*, который можно сопоставить с

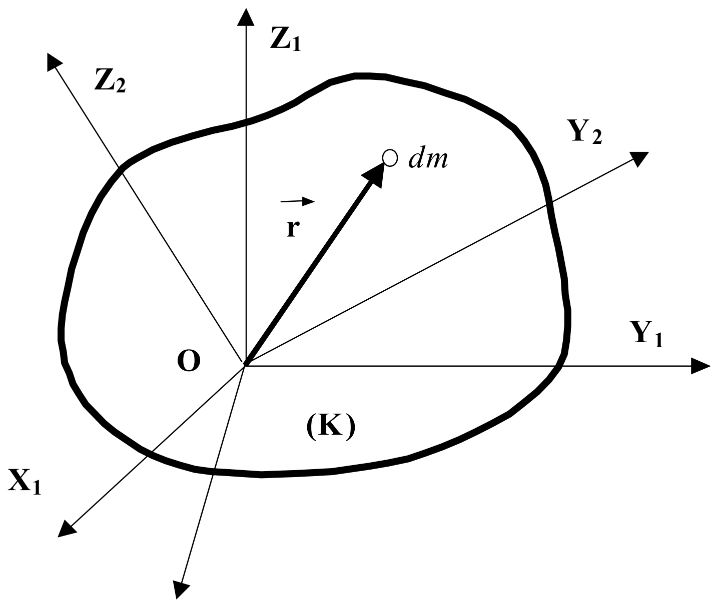

Рис.1

каждой точкой этого тела. Вообще тензор - это сложное математическое понятие и подробное изучение его свойств не входит в программу курса общей физики. Отметим лишь один из инвариантов тензора инерции - линейный инвариант

$$J_I = J_X + J_Y + J_Z = \text{inv}\,. \tag{9}$$

В справедливости (9) можно убедиться, если вычислить моменты инерции произвольного тела К относительно прямоугольных осей X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2, проведенных в какой-либо точке этого тела и расположенных под углом друг к другу (рис. 1). Положение элемента массы dm тела будем определять радиус-вектором $\vec{r}$ проведенным из начала координат. Тогда относительно осей X_1, Y_1, Z_1 можно составить сумму моментов инерции

$$J_{X1}+J_{Y1}+J_{Z1}=\int\limits_{(K)}\left(y_1^2+z_1^2\right)dm+\int\limits_{(K)}\left(x_1^2+z_1^2\right)dm+$$

$$+\int\limits_{(K)}\left(x_1^2+y_1^2\right)dm=2\int\limits_{(K)}\left(x_1^2+y_1^2+z_1^2\right)dm=2\int\limits_{(K)}r^2dm \qquad (10)$$

Аналогично вычислим сумму моментов инерции относительно X, У, Z;

$$J_{X2}+J_{Y2}+J_{Z2}=\int\limits_{(K)}\left(y_2^2+z_2^2\right)dm+\int\limits_{(K)}\left(x_2^2+z_2^2\right)dm+$$

$$+\int\limits_{(K)}\left(x_2^2+y_2^2\right)dm=2\int\limits_{(K)}\left(x_2^2+y_2^2+z_2^2\right)dm=2\int\limits_{(K)}r^2dm \qquad (11)$$

Из сравнения (10) и (11) находим

$$J_{X1}+J_{Y1}+J_{Z1}=J_{X2}+J_{Y2}+J_{Z2}$$

Работа М-4.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ТЕЛА ДИНАМИЧЕСКИМ МЕТОДОМ.

Теоретическая часть.

Моменты инерции тела будем определять с помощью установки (рис. 2), содержащей вертикальную стойку 1, к которой прикреплены узлы, состоящие из блоков, осей и подшипников. Через блок 2 верхнего узла перекинута нить 3 с грузами 4. Нижний узел

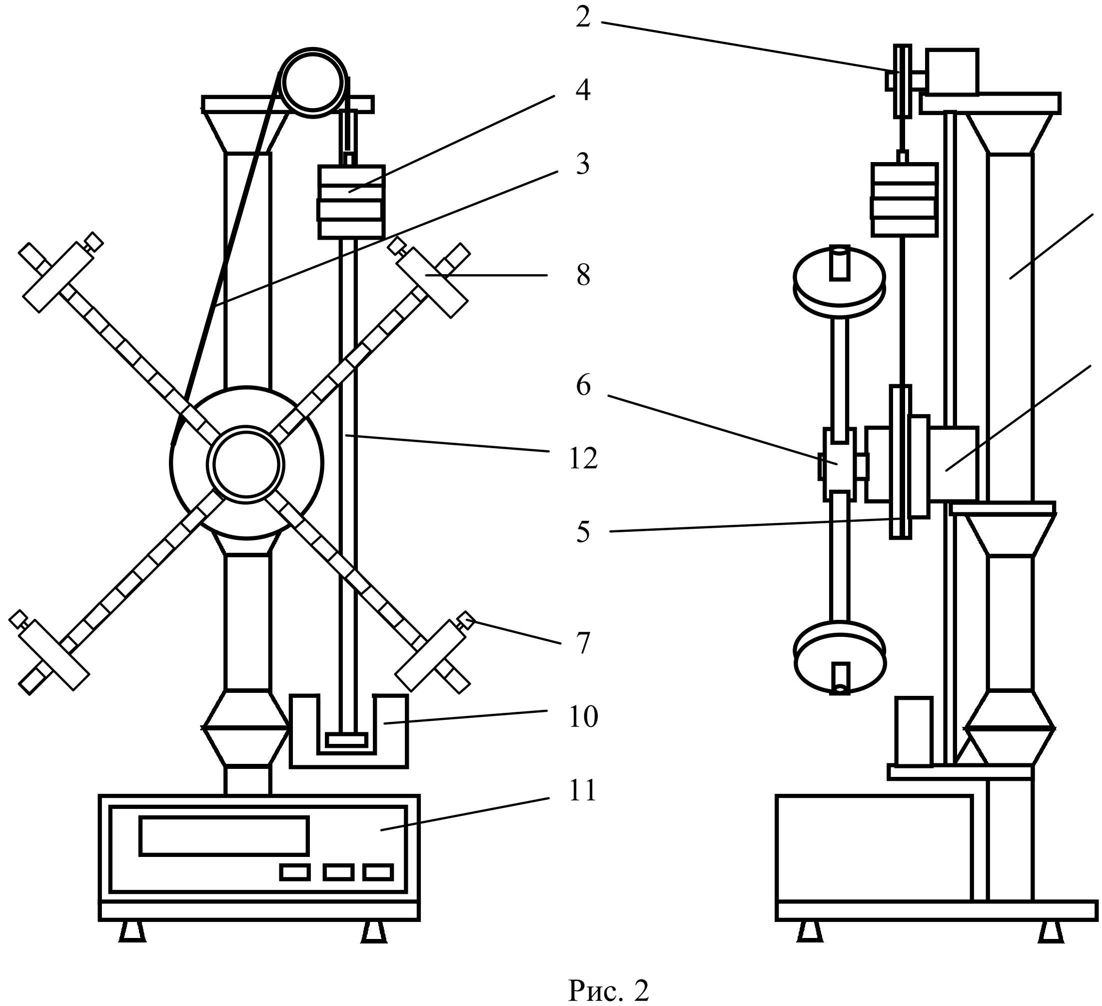

Рис. 2

содержит двухступенчатый шкив 5, на ободе которого имеется вырез для закрепления нити 3. На одной оси со шкивом 5 находится крестовина, состоящая из четырех взаимно перпендикулярных стержней, ввинченных во втулку 6. На каждом стержне закреплены с помощью винта 7 шайбы 8. Перемещая шайбы 8 вдоль стержня, можно изменять момент инерции крестовины. С другой стороны шкива 5 помещен электромагнитный фрикцион 9. При подаче на него напряжения он удерживает шкив 5 от вращения. В нижней части вертикальной стойки 1 крепится узел, содержащий фотоэлектрический датчик 10, который вместе с миллисекундомером 11 составляет систему регистрации времени. Местонахождение груза 4 по высоте регистрируется при помощи миллиметровой линейки 12.

Вместо крестовины на ось нижнего узла может быть навинчено тело, момент инерции которого необходимо определить.

Движение всех составных частей установки будет описываться различными уравнениями. Так, груз массой m перемещается поступательно (рис. 3) в соответствии с уравнением

$$ma = mg - T, \tag{12}$$

где a - ускорение груза. Вращение верхнего блока радиусом R_1 происходит, если предположить отсутствие сил трения, по закону

$$J_1\varepsilon_1 = (T - N)R_1. \tag{13}$$

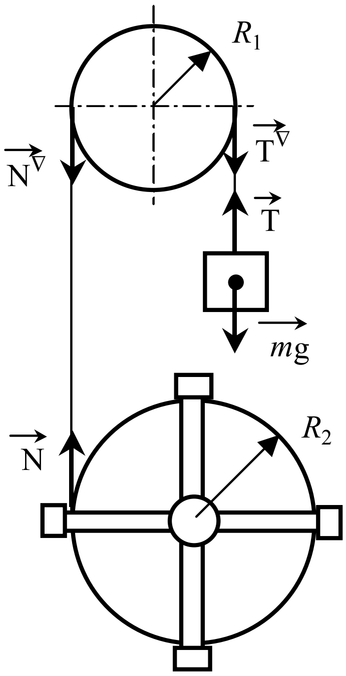

Рис.3

При выводе (12) и (13) использовались обозначения сил натяжения нити $\left|\vec{T}^{\nabla}\right| = \left|\vec{T}\right| = T$; $\left|\vec{N}^{\nabla}\right| = \left|\vec{N}\right| = N$. Угловое ускорение ε_1 верхнего блока связано с линейным ускорением груза соотношением

$$\varepsilon_1 = \frac{a}{R_1}. \tag{14}$$

Кроме того, момент инерции верхнего блока массой m_1

$$J_1 = \frac{1}{2}m_1R_1^2. \tag{15}$$

Окончательно вместо (13) с учетом (14) и (15) можно записать следующее выражение:

$$\frac{1}{2}m_1a = T - N. \tag{16}$$

Вращение нижнего шкива радиусом R_2= 42 мм и крестовины (или исследуемого тела), скрепленной соосно с этим шкивом, происходит в соответствии с уравнением

$$J\varepsilon_2 = NR_2 - M_{TP}, \tag{17}$$

где

$$J = J_{ШК} + J_T; \tag{18}$$

$J_{ШК} = 0{,}4\cdot10^{-4}$ кг·м^2 - момент инерции шкива 5 вместе с осью и подшипниками нижнего узла;

$J_{Т}$ - момент инерции крестовины (или исследуемого тела);

$M_{ТР}$ - суммарный момент сил трения, действующих по оси шкива.

Полагаем, что $M_{ТР}$=const. Решая совместно (12), (16) и (17), приходим к уравнению

$$J\varepsilon_2 = \left(mg - ma - \frac{1}{2}m_1a\right)R_2 - M_{TP}. \tag{19}$$

Как и в предыдущем случае, $\varepsilon_2 = \dfrac{a}{R_2}$. Кроме того, поскольку силы и моменты сил в рассматриваемой системе являются постоянными по модулю, то груз опускается равноускоренно. Поэтому ускорение можно определить из кинематического соотношения $a = \dfrac{2h}{t^2}$, где h - начальная высота груза; t - время его падения. С учетом вышеизложенного формулу (19) можно преобразовать к следующему виду:

$$\frac{J}{mR_2^2}=\left(1-\frac{M_{TP}}{mgR_2}\right)\frac{gt^2}{2h}-1-\frac{1}{2}\frac{m_1}{m}. \qquad (20)$$

Если по оси ординат откладывать t^2, а по оси абсцисс $\frac{J}{mR_2^2}$, то зависимость (20) в этой системе координат будет иметь вид прямой линии. Поскольку масса груза, используемая в экспериментах, значительно превосходит массу верхнего блока 2, то $\frac{1}{2}\frac{m_1}{m} << 1$. Кроме того, при массе груза m≥ 100 г отношение $\frac{M_{TP}}{mgR_2} \le 0,02$. Поэтому уравнение (20) при этих упрощениях запишется так:

$$\frac{J}{mR_2^2}=\frac{gt^2}{2h}-1 \qquad (21)$$

Найденную зависимость (21) можно использовать для определения момента инерции любого тела. Но предварительно необходимо подтвердить экспериментально, что зависимость $t^2 = f\left(\frac{J}{mR_2^2}\right)$ является линейной. Для этого надо измерить время падения груза при вращении тела с известным моментом инерции. В качестве такого тела используем крестовину с подвижными шайбами, момент инерции которой

$$J = J_C + 4m_{Ш}l^2 \qquad (22)$$

где J_C = 5,8·10^{-3} кг·м^2 - суммарный момент инерции крестовины без шайб 8, но включающий $J_Ш$= 0,4·10^{-4} кг·м^2. Масса шайбы 8 $m_Ш$ = 0,2 кг; l - расстояние от центра шайбы до оси вращения.

Выполнение эксперимента.

А. Построение графика $<t^2> = f\left(\frac{J}{mR_2^2}\right)$.

1. Включите в сеть установку.
2. Закрепите шайбы на стержнях крестовины на расстоянии l=130 мм от оси вращения. Расстояние удобно отсчитывать с помощью рисок, которые нанесены на стержень с интервалом 10 мм, при этом необходимо учитывать, что диаметр втулки равен 40 мм.
3. Зацепите нить за вырез на ободе шкива 5, намотайте два раза нить на этот шкив, а затем перекиньте ее через блок 2. Прикрепите к нити груз массой m= 100 г. Поднимите, наматывая одновременно нить на шкив 5, груз на высоту h = 400 мм.
4. Нажмите на миллисекундомере кнопку "СЕТЬ", при этом сработает электромагнит и фрикцион застопорит шкив 5.
5. Нажатием кнопки "СБРОС" приведите миллисекундомер в исходное положение.
6. Нажмите кнопку "ПУСК", при этом электромагнитный фрикцион 9 освободит шкив 5, а миллисекундомер начнет вести счет времени. Когда груз 4 пересечет оптическую ось фотоэлектрического датчика 10, счет времени миллисекундомером прекратится.
7. Запишите показания миллисекундомера в таблицу (см. ниже).
8. Выключите кнопку "СЕТЬ".
9. Повторите опыт 5 раз.
10. Определите среднее время $<t>$ падения груза.
11. Переместите шайбы на стержнях крестовины на расстояние l= 180 мм и повторите операции пп. 4-10.
12. Переместите шайбы на расстояние l=260 мм и вновь повторите операции пп. 4-10.
13. Рассчитайте по формуле (22) для различных l момент инерции крестовины, результат запишите в таблицу.

14. Постройте по результатам экспериментов график $< t^2 >= f\left(\frac{J}{mR_2^2}\right)$.

№ опыта	Расстояние l, мм	Момент инерции J, кг·м^2.	Масса груза m, кг	$\frac{J}{mR_2^2}$	Время t, с	$<t>$, с	$<t^2>$, с

Б. О п р е д е л е н и е м о м е н т а и н е р ц и и т е л а .

В качестве тела с неизвестным моментом инерции возьмем дюралюминиевый брусок в форме прямоугольного параллелепипеда. Измерим моменты инерции этого бруска J_X, J_Y, J_Z относительно трех взаимно перпендикулярных осей X_C, Y_C, Z_C, совпадающих с его осями симметрии.

1. Отвинтите гайку и крестовину, снимите с установки и навинтите на ось шкива 5 брусок его большей гранью.

Внимание! Во избежание повреждения резьбы навинчивать (отвинчивать) крестовину и брусок необходимо предельно аккуратно и только вращением шкива 5, при этом крестовину (брусок) не вращать.

2. Проделайте операции пп. 4-10 раздела А.
3. Используя зависимости (18) и (21), рассчитайте момент инерции тела относительно оси X_C по формуле

$$J_{X_C} = mR_2^2\left(\frac{g < t^2 >}{2h} - 1\right) - J_{ШК}. \qquad (23)$$

Моменты инерции тела относительно осей Y_C, Z_C рассчитываются аналогично.

4. Отвинтите брусок, поверните и навинтите на ось средней гранью.
5. Проделайте операции по пп. 2, 3.
6. Отвинтите брусок, поверните и вновь привинтите, но уже малой его гранью.
7. Проделайте операции по пп. 2, 3.
8. Отвинтите брусок и навинтите крестовину.
9. Определите по формуле (9) линейный инвариант тензора инерции бруска.

Анализ и обработка результатов измерений.

При определении момента инерции J тела по формуле (23) имеем дело с косвенным измерением. Оценим погрешность, которую допускаем при вычислении J по формуле (23).

1. Экспериментальные данные измерения времени t (времени падения груза массой m) имеют разброс, который объясняется случайными погрешностями при проведении повторных измерений. Так как инструментальная погрешность измерения времени в данных опытах существенно меньше случайной, то полная погрешность измерения времени будет равна случайной погрешности и ее следует рассчитывать по формуле

$$\Delta t = t_{P,f}\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(t_i - < t >\right)^2}{n(n-1)}},$$

где f=n-1,
n - число опытов, по которым найдено $<t>$;
$t_{P,f}$ - коэффициент Стьюдента для доверительной вероятности P=0,68 и числа измерений n.

2. За относительную погрешность ε_J измерения момента инерции тела будем брать максимальную относительную погрешность измерения величин, входящих в формулу (23), т.е.

$$\varepsilon_J = max\left\{\varepsilon_m, \varepsilon_R, \varepsilon_h, \varepsilon_{t^2}\right\}.$$

Поскольку погрешность измерений *m*, *R*, *h* значительно меньше погрешности измерения времени *t*, то относительную погрешность косвенных измерений моментов инерция тела можно рассчитать по формуле $\varepsilon_J = \dfrac{2\Delta t}{< t >}$. Абсолютная же погрешность измерения момента инерции тела $\Delta J = \varepsilon_J \cdot J$. Используя действия над приближенными числами, напишите окончательный результат в виде

$$J_X \pm \Delta J_X,\ J_Y \pm \Delta J_Y,\ J_Z \pm \Delta J_Z;\ P=0{,}68.$$

Контрольные вопросы.

1. Чем отличаются уравнения изменения момента импульса тела относительно точки и оси?
2. Что является инвариантной характеристикой тела при его вращательном движении?
3. В каких единицах измеряется момент инерции тела?
4. Будет ли оставаться зависимость $t^2 = f\left(\dfrac{J}{mR_2^2}\right)$ линейной, если возьмем груз большей массы?

Литература.

1. Савельев И.В. Курс общей физики. - М.: Наука, 1982. -Т.·1, 432 с.
2. Фаворин М.В. Моменты инерции тел. - М.: Машиностроение, 1977, - 511 с.