МГТУ им. Н.Э. Баумана

Н.А. Гладков, А.Н. Морозов, Е.В. Онуфриева

СВЯЗАННЫЕ МАЯТНИКИ

Методические указания к лабораторной работе М105 по курсу общей физики

2014

Цель работы - изучение свободных колебаний механической системы (МС) с двумя степенями свободы и внутренней упругой связью. Определение амплитудно-частотных характеристик этой колебательной системы.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Изучение основных закономерностей колебательного движения МС с двумя степенями свободы будем проводить на примере колебаний двух маятников, соединенных упругой связью. Условная схема такой колебательной системы приведена на рис. 1. Положение МС, состоящей из двух маятников, будет определяться двумя независимыми угловыми координатами φ_1 и φ_2, характеризующими углы отклонения маятников от положения равновесия, т.е. такая МС имеет две степени свободы.

В дальнейшем индексы "1" и "2" относятся к параметрам 1-го и 2-го маятников соответственно.

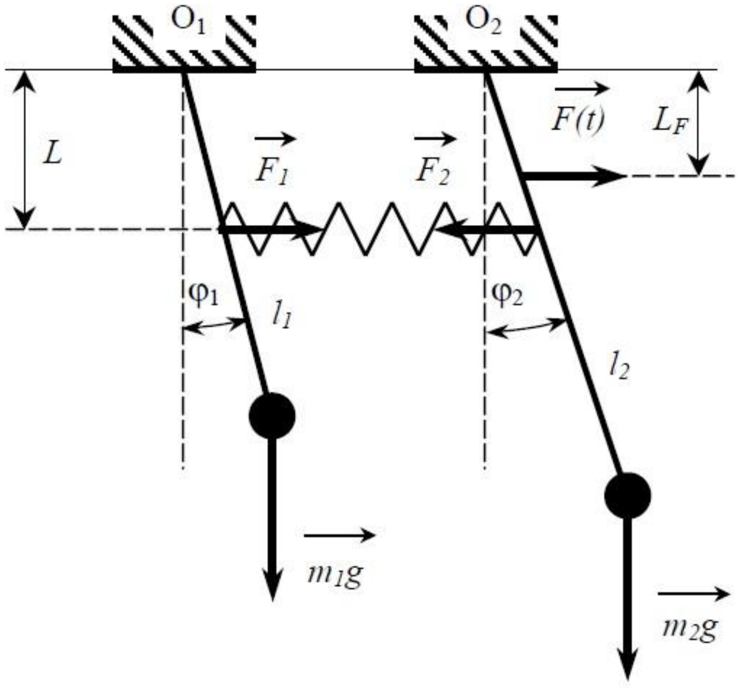


Рис. 1

Маятники состоят из стержней и нанизанных на них массивных тел (дисков) массой m_1 и m_2. Поскольку массы стержней значительно меньше массы тел, то моменты инерции маятников относительно осей вращения O_1z_1 и O_2z_2, проходящих через точки O_1 и O_2, и перпендикулярных плоскости чертежа, можно рассчитать по формулам $I_1 = m_1 l_1^2$ и $I_2 = m_2 l_2^2$, где l_1 и l_2 - расстояния от центра масс тел до соответствующих осей $O_1 z_1$ и $O_2 z_2$. На расстоянии L от осей вращения стержни скреплены пружиной. Для наблюдения вынужденных колебаний внешнее гармоническое воздействие $\vec{F}(t)$ может быть приложено к одному из маятников. На рис. 1 эта сила приложена ко второму маятнику на расстоянии L_F от оси $O_2 z_2$ и приводит его в колебательное движение, которое через пружину передается первому маятнику. Однако в данной лабораторной работе вынужденные колебания не рассматриваются.

Свободные колебания связанных маятников

Для вывода уравнений колебаний маятников используем основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси *Oz*:

$$I_z \varepsilon_z = \sum_{i=1}^{N} M_{iz} \qquad (1)$$

где I_z - момент инерции тела относительно оси *Oz*; $\varepsilon_z = \dfrac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}$ - угловое ускорение тела; $\sum_{i=1}^{N} M_{iz}$ - сумма моментов внешних сил относительно Oz, действующих на данное тело.

При этом считаем, что стержни маятников можно рассматривать как невесомые. Тогда уравнение движения первого маятника в соответствии с выражением (1) примет следующий вид:

$$m_1 l_1^2 \ddot{\varphi}_1 = -m_1 g l_1 \sin\varphi_1 + F_1 L \cos\varphi_1 \qquad (2)$$

где $-m_1 g l_1 \sin\varphi_1 = M_{1z}$ - момент силы тяжести маятника. Знак "минус" указывает на то, что этот момент действует таким образом ,что стремится вернуть маятник в положение равновесия.

Момент упругой силы F_1, действующий на 1-й маятник со стороны деформированной пружины, будет равен $M_{1z} = F_1 L \cos\varphi_1$. Упругая сила $F_1 = k\Delta x$, где k - коэффициент жесткости пружины, Δx - изменение длины пружины. В соответствии с рис. 1 можно записать $F_1 = kL(\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1)$.

Поскольку масса и ускорения отдельных частей пружины невелики, то инерциальными свойствами пружины можно пренебречь, а следовательно, $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2|$.

В данной работе рассматриваем малые колебания маятников, для которых справедливо соотношение следующего вида: $\sin\varphi \approx \varphi$, $\cos\varphi \approx 1$. С учетом изложенного перепишем уравнение (2) в виде:

$$m_1 l_1^2 \ddot{\varphi}_1 + m_1 g l_1 \varphi_1 - kL^2(\varphi_2 - \varphi_1) = 0 \qquad (3)$$

или

$$\ddot{\varphi}_1 + p_{11}\varphi_1 - p_{12}\varphi_2 = 0, \qquad (4)$$

где коэффициенты p_{11} и p_{12} равны

$$p_{11} = \frac{g}{l_1} + \frac{kL^2}{m_1 l_1^2}; \; p_{12} = \frac{kL^2}{m_1 l_1^2}.$$

Уравнения аналогичные уравнениям (3), (4), можно составить и для второго маятника:

$$\ddot{\varphi}_2 + p_{22}\varphi_2 - p_{21}\varphi_1 = 0, \qquad (5)$$

где $p_{22} = \dfrac{g}{l_2} + \dfrac{kL^2}{m_2 l_2^2}$; $p_{21} = \dfrac{kL^2}{m_2 l_2^2}$.

Таким образом, получена система двух линейных однородных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка для функций $\varphi_1 = \varphi_1(t)$ и $\varphi_2 = \varphi_2(t)$.

Анализ системы уравнений (4) и (5) показывает, что свободные колебания двух соединенных маятников характеризуются собственными круговыми частотами ω_I и ω_{II}, определяющими главные колебания системы. Эти частоты называются собственными, потому что зависят от параметров колебательной системы (l_1, l_2, L, m_1, m_2, k) и не зависят от условий выведения системы из положения равновесия (начальных условий). Первое главное колебание системы описывается уравнениями $\varphi_1 = A_1^I \cos(\omega_I t + \alpha_1)$, $\varphi_2 = A_2^I \cos(\omega_I t + \alpha_1)$. Аналогичную запись имеем и для второго главного колебания системы: $\varphi_1 = A_1^{II} \cos(\omega_{II} t + \alpha_2)$, $\varphi_2 = A_2^{II} \cos(\omega_{II} t + \alpha_2)$.

Произвольные постоянные A_1^I, A_2^I, A_1^{II}, A_2^{II}, α_1, α_2 определяют из начальных условий движения колебательной системы. Главные колебания возникают только при определенных начальных условиях. В случае произвольного возбуждения колебательной системы колебания маятников происходят на обеих главных частотах ω_I и ω_{II}. При этом колебания каждого маятника складываются из главных колебаний системы:

$$\varphi_1 = B_1 \cos(\omega_I t + \alpha_1) + D_1 \cos(\omega_{II} t + \alpha_2), \tag{6}$$

$$\varphi_2 = B_2 \cos(\omega_I t + \alpha_1) + D_2 \cos(\omega_{II} t + \alpha_2). \tag{7}$$

Поскольку функции φ_1 и φ_2 должны удовлетворять уравнениям (4) и (5), то коэффициенты B_1, B_2, D_1, D_2 - взаимосвязаны. Например,

$$B_1 = \frac{p_{12}}{p_{11} - \omega_I^2} B_2 ; \quad D_1 = \frac{p_{12}}{p_{11} - \omega_{II}^2} D_2 .$$

Параметры B_1, D_2, α_1, α_2 (или D_1, B_2, α_1, α_2) определяют из начальных условий колебательной системы. Зависимости (6) и (7) представляют собой общее решение системы уравнений (4), (5).

все значительно упрощается, когда связанные маятники одинаковы, т.е. $l_1 = l_2 = l$, а $m_1 = m_2 = m$. В этом случае частоты первого и второго главных колебаний системы будут соответственно равны:

$$\omega_I = \sqrt{g/l} , \tag{8}$$

$$\omega_{II} = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2kL^2}{ml^2}} . \tag{9}$$

Действительно, в этом случае $p_{11} = p_{22}$, $p_{12} = p_{21}$. Поэтому из уравнений (4) и (5) можно составить следующие комбинации:

$$\left(\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2\right) + \frac{g}{l}\left(\varphi_1 + \varphi_2\right) = 0 ,$$

$$\left(\ddot{\varphi}_1 - \ddot{\varphi}_2\right) + \left(\frac{g}{l} + \frac{2kL^2}{ml^2}\right)\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) = 0 .$$

Если рассмотреть эти уравнения относительно новых переменных $\psi = \varphi_1 + \varphi_2$, $\eta = \varphi_1 - \varphi_2$, то получим

$$\ddot{\psi} + \omega_I^2 \psi = 0 ,$$

$$\ddot{\eta} + \omega_{II}^2 \eta = 0 .$$

Последние уравнения описывают свободные гармонические колебания с круговыми частотами ω_I и ω_{II}.

Итак, в случае одинаковых маятников частота первого главного колебания соответствует синфазным колебаниям маятников, а частота второго главного колебания - антифазным (противофазным) колебаниям маятников.

Синфазные колебания могут быть получены, если пружина, связывающая маятники, не будет при их движении деформироваться. Это достигается тем, что оба маятника в начальный момент времени отклоняют в одну сторону на один и тот же угол и им сообщают равные начальные скорости. При последующем колебательном движении пружина остается недеформированной и не влияет на колебательный процесс. Частота этого колебания определяется формулой (8), т.е. совпадает с частотой математического маятника.

Противофазные колебания получаем, если в начальный момент времени маятники отклоняют в разные стороны, но на равные углы и им сообщают равные по величине, но противоположно направленные начальные скорости. В этом случае упругие силы со стороны пружины активно влияют на колебательный процесс, а следовательно, $\omega_{II} > \omega_I$ [см. формулы (8) и (9)].

Если параметры колебательной системы подобраны так, что второе слагаемое под радикалом в формуле (9) будет много меньше первого, т.е. $\frac{2kL^2}{\left(ml^2\right)} \ll \frac{g}{l}$, то в этом случае $\omega_{II} \approx \omega_I$. Тогда при произвольном отклонении колебательной системы из положения равновесия (при произвольном возбуждении колебаний) будем наблюдать биения - колебания с периодически изменяющейся амплитудой (рис. 2)

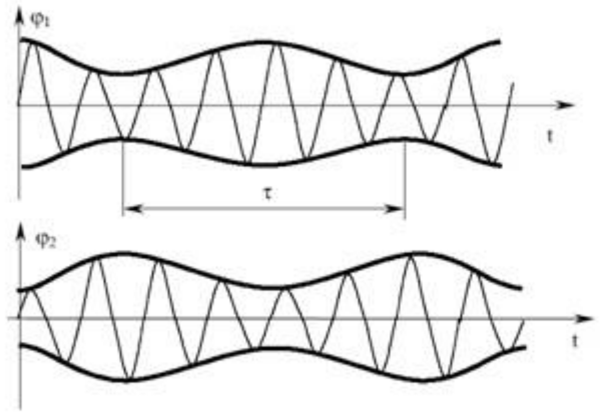


Рис. 2

Наиболее наглядно биения выражены в случае, если в начальный момент времени один из маятников отклонить, другой в это время придержать в положении равновесия, а затем оба маятника отпустить. В начале колебания первого маятника будут близки к свободным, но в дальнейшем под действием упругой пружины в колебательный процесс все в большей степени вовлекается второй маятник. (рис. 3).

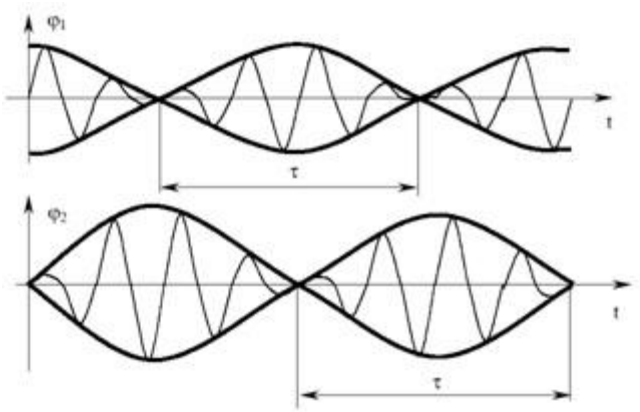


Рис. 3

Поскольку энергия маятниковой системы остается постоянной, то будет происходить последовательная перекачка энергии от одного маятника к другому. В то время, когда амплитуда одного из маятников будет максимальной, амплитуда другого маятника станет равна нулю.

Время τ (рис. 3) определяет период биения. Период биения не зависит от способа возбуждения колебаний (см. рис. 2,3), поэтому для одной и той же маятниковой системы остается величиной постоянной:

$$\tau = \frac{2\pi}{\left(\omega_{II} - \omega_{I}\right)}. \tag{10}$$

Из формул (8), (9) вытекает следующее выражение:

$$\omega_{II}^2 - \omega_I^2 = 2\frac{k}{m}\frac{L^2}{l^2}, \tag{11}$$

которое можно использовать, например, для определения по экспериментальным результатам коэффициента жесткости пружины k.

Экспериментальная часть

На рис. 4 представлена установка для изучения колебаний связанных маятников, каждый из которых состоит из стержня - 1, диска - 2 (масса диска m = 1 кг) и держателя - 3, в который вмонтирован датчик угла поворота маятника. Двойная спиральная пружина - 4, жесткость которой равна $k = 3$Н/м соединяет маятники упругой связью. Штативы 5 крепятся к столу с помощью зажимов - 6. В верхней части маятники крепятся к штативам зажимами - 7.

8 - основной модуль Cobra 3.

9 - блок питания (источник питания) на 12 В.

10 - персональный компьютер.

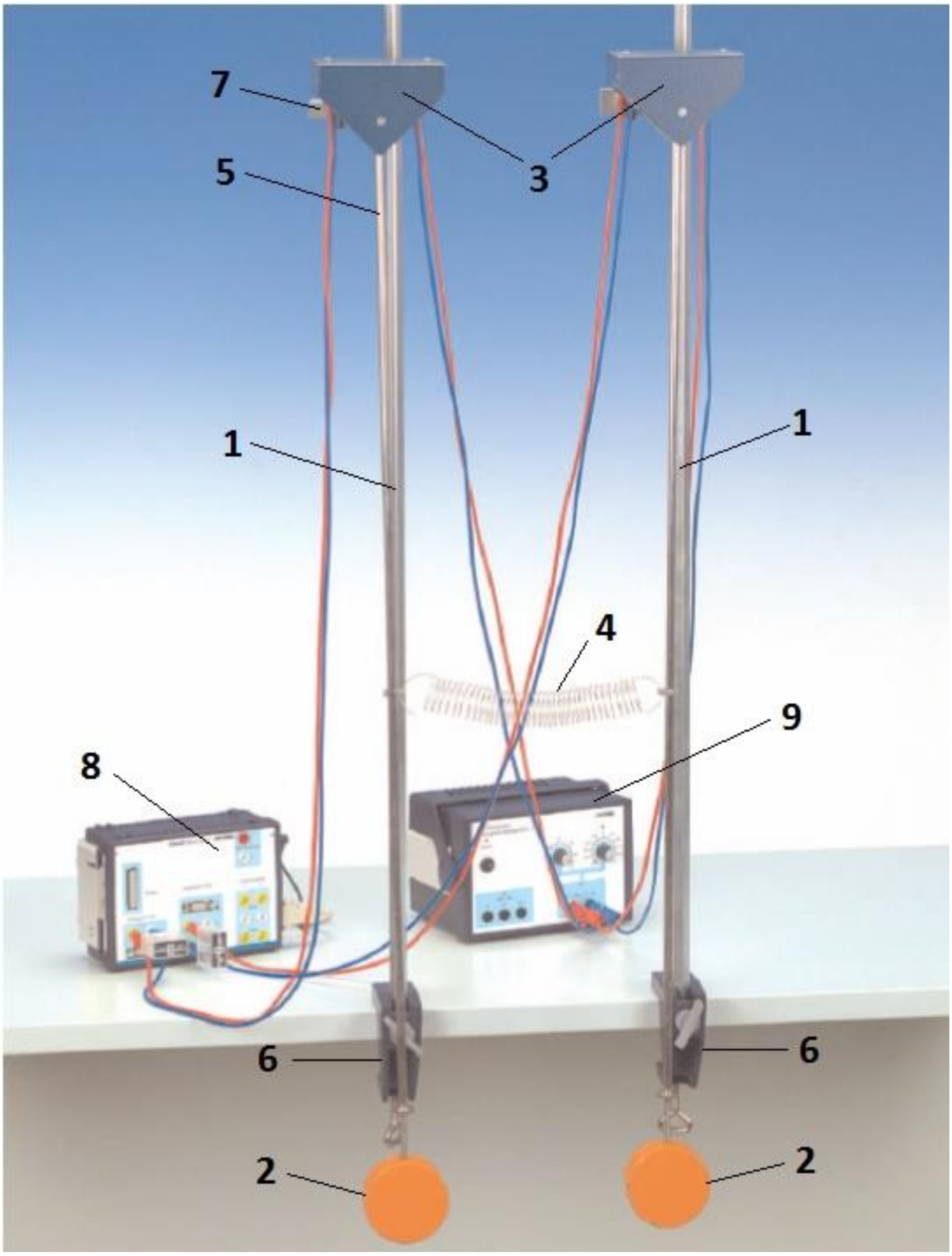


Рис. 4

Порядок работы на установках к лабораторной работе "Связанные маятники".

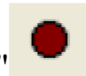
На столе расположены два прибора Cobra 3 и источник питания (ИП).

1. Подключить установку Cobra 3 к порту компьютера COM 1, COM 2 или через USB.

2. Включить источник питания, нажав на тумблер, расположенный на задней панели прибора.

3. Включить компьютер.

4. Запустить программу измерений "measure".

5. В меню "Файл" выбрать "Новое измерение"  . Появится диалоговое окно (см. рис. 5). Проверить параметры в диалоговом окне в соответствии с рис. 5. Нажать кнопку "Далее".

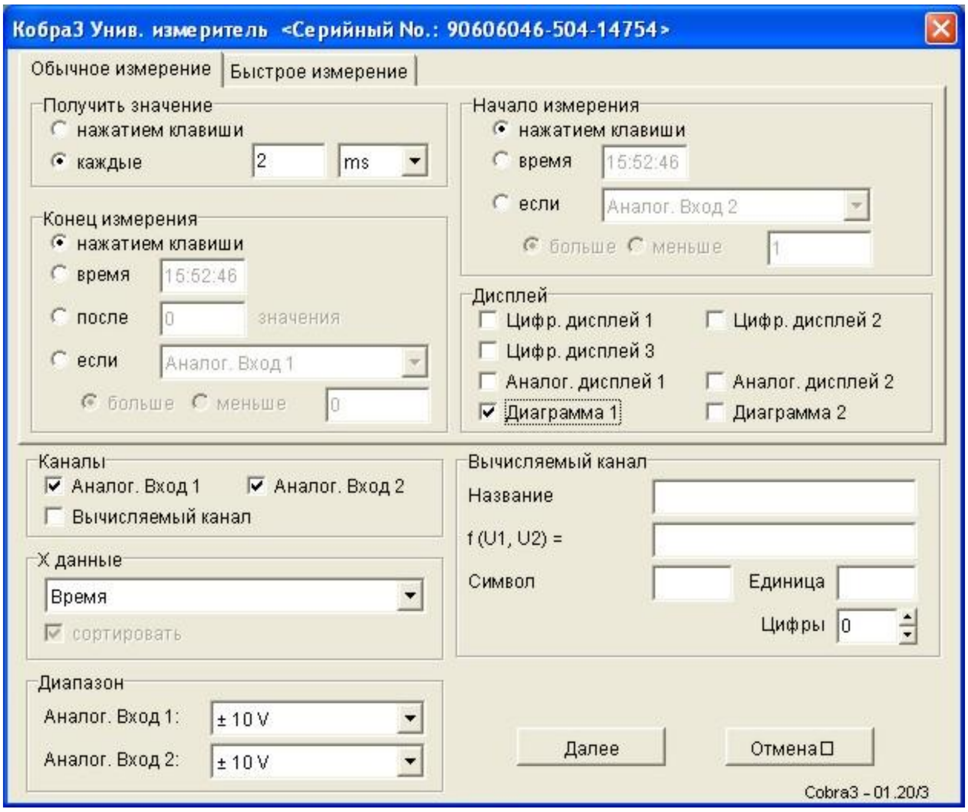


Рис. 5 Параметры измерений.

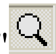
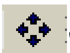
6. Убедиться, что на аналоговых входах 1 и 2 выставлены "нули".

7. Вывести маятники из положения равновесия для измерения синфазных колебаний, или антифазных колебаний, или биений. Отклонить маятники на небольшой угол $\varphi = 8^{\circ}$ и отпустить. При этом обязательно следить, чтобы колебания маятников происходили строго в вертикальной плоскости.

8. После установления стабильного колебательного процесса (в течение $\approx$ 30 с) начать запись результатов измерения. Для этого нужно нажать кнопку "Начать измерение" в правом нижнем углу диалогового окна.

9. Продолжать измерения приблизительно 2 минуты.

10. Нажать кнопку "Закончить измерения". На экране появиться график колебательного процесса.

11. При помощи функции "Изменить" ("Лупа") в командной строке можно увеличить интересующую нас область регистрируемого процесса. Нажатие клавиши "Подгонка графиков" позволит вам вернуться к исходным параметрам дисплея.

12. Определить период регистрируемого колебания.

13. Повторить опыт не менее 5 раз.

<u>Исследование свободных синфазных колебаний.</u>

1. Измерить расстояние *l* от оси вращения каждого маятника до центра его диска.

2. Провести действия в соответствии с пунктами 4 - 6 порядка работы на установках.

3. Отклонить оба маятника в одну сторону на одинаковый угол (~ 8°) от вертикали и отпустить их.

4. Далее проводить действия в соответствии с пунктами 7 - 13 порядка работы на установках.

5. Определите период и циклическую частоту экспериментальных значений синфазных колебаний по формулам:

$$T_I^Э = \frac{t_n}{n}, \qquad \omega_I^Э = \frac{2\pi}{T_I^Э}$$

где t_n - время n колебаний.

6. Найдите частоту синфазных колебаний по формуле (8).

7. Рассчитайте относительную погрешность определения частоты синфазных колебаний:

$$\varepsilon_{\omega_I} = \frac{\left|\omega_I - \omega_I^Э\right|}{\omega_I} \cdot 100\%$$

8. Результаты всех расчетов запишите в таблицу 1.

Таблица 1

t_n, с	$T_I^Э$, с	$\omega_I^Э$, с$^{-1}$	l, м	ω_I, с$^{-1}$	ε, %

Исследование свободных антифазных колебаний.

1. Измерить расстояние L от оси вращения каждого маятника до места крепления пружины.

2. Провести действия в соответствии с пунктами 4 - 6 порядка работы на установках.

3. Отклоните маятники на равные углы (~ 8º) в противоположные стороны от положения равновесия и отпустите их.

4. Далее проводить действия в соответствии с пунктами 7 - 13 порядка работы на установках.

5. Определите период и циклическую частоту экспериментальных значений антифазных колебаний по формулам:

$$T_{II}^{Э} = \frac{t_n}{n}, \quad \omega_{II}^{Э} = \frac{2\pi}{T_{II}^{Э}}$$

где t_n - время n колебаний.

6. Найдите частоту антифазных колебаний по формуле (9).

7. Рассчитайте относительную погрешность определения частоты антифазных колебаний:

$$\varepsilon_{\omega_{II}} = \frac{\left|\omega_{II} - \omega_{II}^{Э}\right|}{\omega_{II}} \cdot 100\%$$

8. Результаты всех расчетов запишите в таблицу 2.

Таблица 2

t_n, с	$T_{II}^{Э}$, с	$\omega_{II}^{Э}$, с$^{-1}$	l, м	L, м	ω_{II}, с$^{-1}$	ε, %

Исследование биений.

1. Провести действия в соответствии с пунктами 4 - 6 порядка работы на установках.

2. Отклоните одной рукой первый маятник на угол ~ 10^{o} в противоположную сторону от второго маятника. Одновременно другой рукой придерживайте второй маятник. Отпустите оба маятника.

3. Далее проводить действия в соответствии с пунктами 7 - 13 порядка работы на установках.

4. Определите период одного биения по формуле:

$$\tau = \frac{t_б}{n},$$

где $t_б$ - время, равное *n* периодам биений.

5. Повторите эти опыты не менее 5 раз и определите среднее значение периода биений:

$$\langle\tau\rangle = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}\tau_i$$

6. Найдите период биений по формуле (10). При этом в качестве частот ω_I и ω_{II} возьмите значения $\omega_I^Э$ и $\omega_{II}^Э$ из таблиц 1 и 2.

7. Рассчитайте относительную погрешность периода биений по формуле:

$$\varepsilon_\tau = \frac{|\tau - \langle\tau\rangle|}{\tau}\cdot 100\%$$

8. Все результаты запишите в таблицу 3.

9. Отклоните 1-й маятник на угол ~ 10º, а 2-й - в противоположную сторону на угол 5º. Отпустите их. Однократным измерением определите период биения τ^0 по методике, изложенной в пунктах 1, 3 , 4 и запишите результат в таблицу 3. Сравните полученный результат со средним значением периода биений $\langle\tau\rangle$ из таблицы 3. Ответьте на пятый контрольный вопрос, помещенный в конце методических указаний.

Таблица 3

№ опыта	$t_{бi}$, с	τ_i, с	$\langle\tau\rangle$, с	τ, с	ε_τ, %	τ^0
1						
2						
3						
4						
5						

Контрольные вопросы.

1. Какие колебания называются синфазными?

2. Какие колебания называются антифазными?

3. Какие колебания называются биениями?

4. Каким колебаниям соответствуют частоты ω_I и ω_{II} главных колебаний?

5. Зависит ли период биения от способа вывода маятниковой системы из положения равновесия?

Литература.

1. Матвеев А.Н. Механика и теория относительности. - М.: Мир и образование, 2003. - 432 с.

2. Стрелков С.П. Механика. - М.: Наука, 1975. - 560 с.

3. Савельев И.В. Курс общей физики. Книга 1. Механика. - М.: Наука, 1998. - 336 с.