УДК 53
ББК 22.3
Г52

Рецензент *С.В. Ладов*

Гладков Н.А.

Г52 Измерение скорости продольных упругих волн в металлическом стержне методом резонанса : метод. указания к выполнению лабораторной работы М7 по курсу общей физики / Н.А. Гладков, А.М. Кириллов, А.В. Новгородская, А.С. Романов. – М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010. – 13, [3] с. : ил.

Методические указания содержат краткие сведения из теории изучаемого явления, методику выполнения экспериментов, а также порядок обработки полученных результатов.

Для студентов первого курса всех специальностей МГТУ им. Н.Э. Баумана.

УДК 53
ББК 22.3

Цель работы — экспериментальное определение скорости распространения продольных упругих волн в металлическом стержне в соответствии с формой установившейся в нем стоячей упругой волны.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Если каким-либо способом механически воздействовать на некоторый участок упругого тела и деформировать его изменяющейся во времени силой, то благодаря упругим свойствам материала тела деформации начнут распространяться от данного участка упругого тела к другим его участкам. Если это воздействие является периодическим, то в упругом теле возникают волны деформаций. Эти волны называются *звуковыми*, если частицы упругой среды колеблются около своего положения равновесия с малой амплитудой и значения частоты этих колебаний находятся в диапазоне, характерном для звуковых волн.

В твердом теле могут существовать поперечные и продольные волны. Волна называется *продольной*, если смещение частиц среды происходит вдоль направления распространения волны, и *поперечной*, если смещение частиц среды происходит перпендикулярно этому направлению.

В упругой волне каждая частица упругой среды колеблется около своего положения равновесия с частотой, равной частоте волны. При этом каждая частица взаимодействует с окружающими частицами среды посредством упругих сил, возникающих вследствие того, что фазы колебаний этих частиц не совпадают. Таким образом, каждая частица упругой среды получает импульс от одних окружающих ее частиц и передает его другим частицам. Этот процесс обмена импульсами (переноса импульса) может быть описан исходя из закона изменения импульса. Выведем соответствующее волновое уравнение для частного случая распространения плоской продольной упругой волны вдоль прямого однородного стержня.

Для большей наглядности рассмотрим вначале деформирование прямого однородного стержня, жестко (т. е. без перемещений) закрепленного на одном торце и нагруженного постоянной растягивающей силой $\vec{F}$ на другом. На рис. 1 показано состояние стержня до и после деформирования. Здесь x — расстояние от места крепления стержня до произвольного элемента стержня (начальная координата элемента стержня); dx — начальная длина элемента стержня; $dx_к$ — конечная длина этого элемента; ξ — перемещение левой границы элемента стержня; $\xi + d\xi$ — перемещение правой границы элемента стержня; $\xi(l)$ — полное удлинение стержня под действием силы $\vec{F}$.

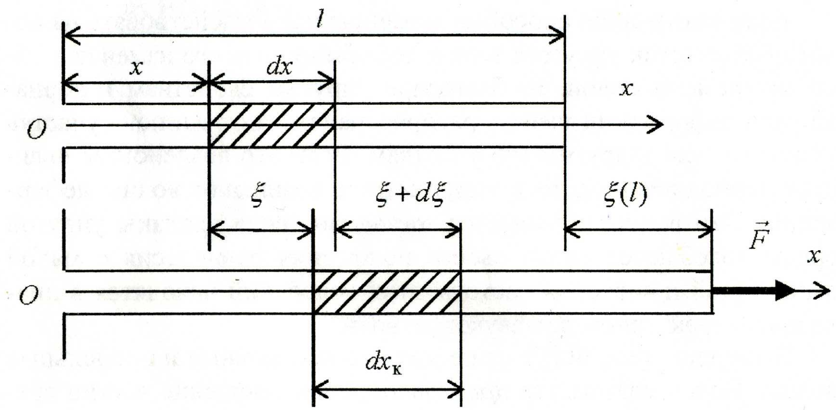

Рис. 1. Схема деформирования стержня

В соответствии с рис. 1 определим длину деформированного элемента стержня $dx_к = (x + dx + \xi + d\xi) - (x + \xi) = dx + d\xi$. Как видно, существенным является не все перемещение $\xi(x)$ элемента стержня dx, а лишь перемещение его части $d\xi$. Для характеристики деформированного состояния элемента стержня используют понятие *деформации* (относительного удлинения), равной $\varepsilon = d\xi/dx$.

В то же время напряженное состояние принято характеризовать нормальным напряжением $\sigma = F/S$, где S — площадь поперечного сечения стержня. Для упругого стержня справедлив закон Гука,

устанавливающий прямую пропорциональность напряжения σ и деформации ε:

$$\sigma = E\varepsilon,$$

где E — модуль Юнга (модуль упругости первого рода), Н/м^2.

Рассмотрим теперь продольную упругую волну, распространяющуюся вдоль стержня. В этом случае смещение частиц стержня будет зависеть от двух переменных $\xi(x,t)$, где x — положение равновесия частицы упругой среды; t — время. Тогда деформация частицы составит $\varepsilon(x,t) = \partial\xi/\partial x$ (полная производная заменена частной производной).

Процесс передачи импульса будем описывать в предположении, что частицы среды колеблются вблизи своего положения равновесия, соответствующего недеформированному состоянию и задаваемого координатой x, а смещение $\xi(x,t)$ мало́.

Выделим элемент dx стержня (рис. 2), достаточно малый для того, чтобы можно было считать смещение $\xi(x,t)$ одинаковым для всего элемента. Тогда на основании второго закона Ньютона можно записать

$$\rho S dx \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = F(x + dx, t) - F(x,t), \tag{1}$$

где $\rho = \mathrm{const}$ — плотность материала стержня; $\partial^2\xi/\partial t^2$ — ускорение элемента стержня.

Разность сил в правой части уравнения (1) в силу малости величины dx перепишем в виде $F(x+dx,t) - F(x,t) = \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,t)dx$ и,

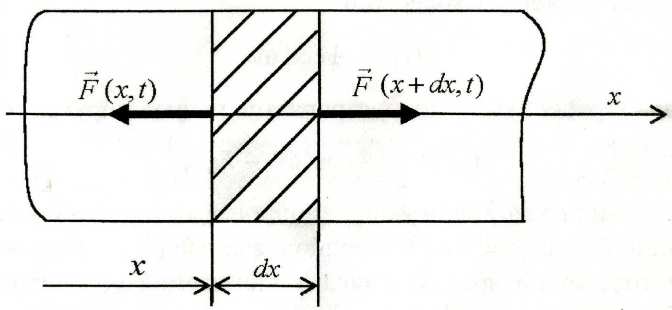

Рис. 2. Распределение сил на элементе стержня

разделив (1) на площадь поперечного сечения стержня S, получим

$$\rho\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = \frac{\partial\sigma}{\partial x}. \tag{2}$$

В силу закона Гука производную от нормального напряжения σ в правой части уравнения (2) с учетом зависимости для деформации частицы стержня преобразуем следующим образом:

$$\frac{\partial\sigma}{\partial x} = \frac{\partial\sigma}{\partial\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial x} = \frac{\partial\sigma}{\partial\varepsilon}\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = E\frac{\partial^2\xi}{\partial\xi^2}.$$

Тогда окончательно получим волновое уравнение в виде

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}, \tag{3}$$

где скорость упругой волны в стержне будет равна

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \tag{4}$$

Общее решение волнового уравнения (3) имеет вид

$$\xi(x,t) = f_1(ct - x) + f_2(ct + x),$$

где f_1 и f_2 — произвольные функции, определяемые начальными и граничными условиями, т. е. условиями нагружения стержня. При этом функция f_1 соответствует прямой волне, которая распространяется вдоль оси x, а функция f_2 — обратной волне, которая распространяется в противоположном направлении оси x.

Если на левом торце стержня длиной l будет действовать источник гармонических колебаний

$$\xi(t) = A\cos\omega t,$$

то вдоль стержня будет распространяться прямая упругая волна

$$\xi(x,t) = A\cos(\omega t - kx), \tag{5}$$

где A — амплитуда волны; ω — циклическая (круговая) частота колебаний; $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$ — волновое число (λ — длина волны).

При отражении прямой волны, описываемой уравнением (5), от свободного противоположного правого торца стержня длиной l

по стержню будет распространяться обратная отраженная упругая волна

$$\xi(x,t) = A\cos(\omega t + kx - 2kl). \tag{6}$$

При наложении прямой (5) и обратной (6) упругих волн в стержне образуется стоячая упругая волна стоячей волны,

$$\xi(x,t) = \xi_1(x,t) + \xi_2(x,t) = 2A\cos(kl - kx)\cos(\omega t - kl).$$

Амплитуда стоячей упругой волны

$$A_{ст} = 2A\cos(k\ell - kx). \tag{7}$$

При $x = l$ из (7) следует, что $A_{ст} = 2A$. Это означает, что на конце стержня всегда будет наблюдаться пучность. Чтобы на левом торце стержня, откуда по стержню распространяется возмущение (при $x = 0$), образовалась пучность, необходимо, чтобы в (7) выполнялось условие $\cos kl = 1$. А это возможно, если аргумент будет равен

$$kl = \pi n,$$

где $n = 1, 2, 3, \ldots$ — целочисленный ряд значений. Или с учетом того, что $k = 2\pi/\lambda$, после преобразований получаем

$$l = \frac{\lambda}{2}n. \tag{8}$$

Из формулы (8) ясно, что при образовании в стержне стоячей упругой волны на его длине l должно укладываться целое число полудлин упругих волн.

Величина $\lambda/2$ в формуле (8) определяет длину стоячей упругой волны: $\lambda_{ст} = \lambda/2$. Из формулы (8) можно также определить частоты ν_n, при которых в стержне образуется стоячая упругая волна. Поскольку

$$\lambda = \frac{c}{\nu}, \tag{9}$$

где ν — частота колебаний, связанная с циклической частотой соотношением $\omega = 2\pi\nu$, а скорость упругой волны c определяется по формуле (4), то при подстановке (9) в (8) находим возможные частоты, при которых в стержне может образоваться стоячая упругая волна:

$$\nu_n = \frac{c}{2l}n. \tag{10}$$

При $n = 1$ из (10) определяем основную частоту колебаний (основной тон) $\nu = c/(2l)$, а при $n = 2, 3, 4$ находим обертоны.

Из формулы (7) при условии $\cos(kl - kx) = 0$ находим координаты узлов стоячей упругой волны:

$$kl - kx = \frac{\pi}{2}(2m + 1),$$

где $m = 0, 1, 2, 3, \ldots$ Отсюда при условии $k = 2\pi/\lambda$ находим

$$x_m = l - \frac{\lambda}{4}(2m + 1)\,. \qquad (11)$$

Подставляя в (11) целочисленный ряд значений, определяем координаты узлов:

при $m = 0$ $x_0 = l - \dfrac{\lambda}{4}$;

при $m = 1$ $x_1 = l - \dfrac{3}{4}\lambda$;

при $m = 2$ $x_2 = l - \dfrac{5}{4}\lambda$.

Эти координаты для различных стоячих упругих волн указаны на рис. 3. В точке с координатой $x = 0$ из физических представлений невозможно возникновение узла стоячей упругой волны, так как с этого торца стержня передается возмущение от внешнего источника.

На рис. 3 показаны стоячие упругие волны в стержне, соответствующие частоте основного тона $n = 1$ (рис. 3, *а*) и обертону при $n = 3$ (рис. 3, *б*).

В лабораторной установке стержень закреплен посредине. Следовательно, в центре стержня возникает узел стоячей упругой волны. В таком стержне стоячая упругая волна образуется при частоте основного тона $n = 1$ (при этом $m = 0$) (см. рис. 3, *а*) и частоте обертона $n = 3$ (при этом $m = 0, 1, 2$) (см. рис. 3, *б*), а также при частотах обертонов при $n = 5, 7, 9, \ldots$, т. е. при нечетных числах целочисленного ряда. Однако на практике четкая регистрация стоячей упругой волны в лабораторной установке будет наблюдаться только при частоте основного тона, т. е. при $n = 1$.

Образование стоячей упругой волны в стержне означает наступление в нем резонанса, так как в этом случае отсутствует

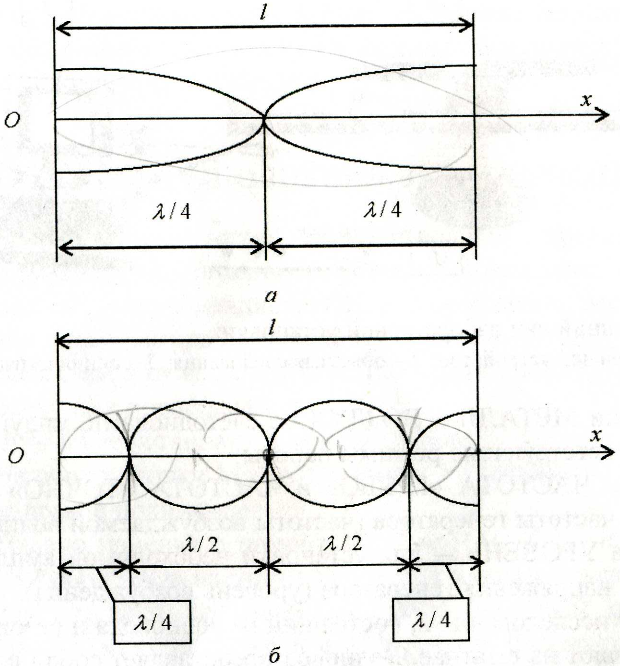

Рис. 3. Образование стоячей упругой волны в стержне при различных частотах:
а – при $n = 1$; *б* – при $n = 3$

направление переноса импульса, а следовательно, и энергии. При этом амплитуды колебаний резко возрастают. На этом явлении основано определение различных частот колебаний исследуемого стержня.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

Опыты со стержнем проводятся на лабораторной установке (рис. 4). В состав измерительного устройства *1* входят генератор гармонических колебаний с усилителем мощности для возбуждения колебаний в громкоговорителе и частотомер для измерения частоты генератора. Частотомер показывает частоту генератора на цифровом табло. Кроме табло на передней панели измерительного устройства *1* размещены органы управления установкой:

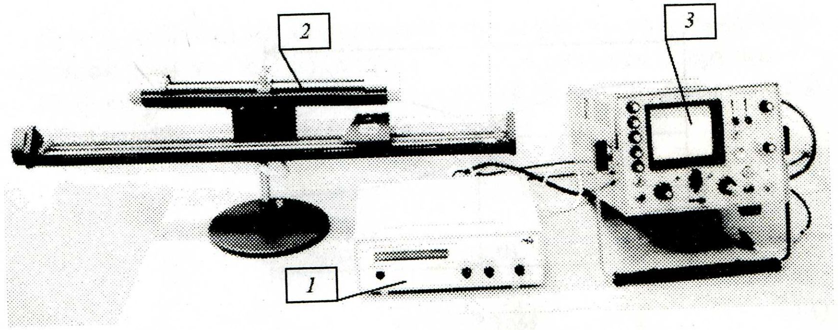

Рис. 4. Внешний вид лабораторной установки:
1 – измерительное устройство; *2* – объект исследования; *3* – осциллограф

- кнопки МЕТАЛЛ и ВОЗДУХ со светодиодами, индуцирующими соответствующие режимы работы;
- ручки ЧАСТОТА «ГРУБО» и ЧАСТОТА «ТОЧНО» – для установки частоты генератора (частоты возбуждаемой волны);
- ручка УРОВЕНЬ – для установки необходимой амплитуды выходного напряжения генератора (уровень возбуждения).

Объект исследования *2*, состоящий из волновода и резонатора, устанавливают на штативе. Волновод представляет собой воздушный канал и предназначен для измерения скорости звука в воздухе (в данной лабораторной работе не используется). Резонатор (со стержнем) выполнен в виде желоба и предназначен для определения скорости звука в твердых телах.

Однородный стержень жестко закреплен в плоскости геометрического центра тяжести. На торцах стержня запрессованы шайбы из ферромагнитного материала. С одного торца стержня на расстоянии 0,1. . . 0,3 мм находится датчик, соединенный с генератором. Изменяя частоту генератора, меняют частоту переменного тока, протекающего через датчик. Другой торец стержня при этом начинает колебаться в результате магнитного взаимодействия стержня с датчиком. Частота этих колебаний равна частоте тока, протекающего через датчик. В стержне возникают продольные волны, которые воспринимаются приемником, находящимся на расстоянии 0,1. . . 0,3 мм от другого торца стержня. Приемник преобразует механические колебания в электрический сигнал, амплитуда которого пропорциональна амплитуде продольных колебаний стержня. Далее электрический сигнал подается на вертикально отклоняю-

щие пластины осциллографа *3*. При совпадении частоты генератора с собственной частотой стержня амплитуда регистрируемого сигнала на экране осциллографа резко возрастает.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА

1. Включите осциллограф и измерительное устройство. Сетевой выключатель измерительного устройства находится на его задней панели и помечен надписью СЕТЬ. Как правило, все приборы, входящие в лабораторную установку, уже соединены электрическими кабелями в нужном порядке. Если это не так, то обратитесь к лаборанту или преподавателю.

2. Прогрейте установку в течение 5 мин!

3. Нажмите кнопку МЕТАЛЛ. Ручку УРОВЕНЬ установите в крайнее правое положение.

4. Плавно изменяя с помощью ручек ЧАСТОТА «ГРУБО» и ЧАСТОТА «ТОЧНО» частоту возбуждения датчика и следя по осциллографу за сигналом приемника, получите резкое увеличение амплитуды сигнала (не менее чем в 2 раза), что соответствует образованию стоячей упругой волны (наступлению резонанса).

Замечание. Для правильного определения резонансной частоты не рекомендуется устанавливать значение усиления каналов осциллографа менее чем 0,5 В / деление.

5. Запишите измеренное значение резонансной частоты ν_i (i – номер эксперимента) в табл. 1. Повторите измерение не менее пяти раз.

Таблица 1

Номер эксперимента	Резонансная частота ν_i, Гц	Скорость звука c_i, м/с
1		
⋮		
5		

6. В соответствии с формулой (10) вычислите скорость звука для основного тона ($n = 1$) по формуле $c_i = 2\nu_i l$ и запишите полученный результат в табл. 1.

7. Вычислите среднее значение скорости звука по формуле $c = \dfrac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N} c_i$, где N — число выполненных измерений, и запишите результат в табл. 2.

Таблица 2

c, м/с	σ_c, м/с	$t_p(N-1)$	Δc, м/с	$c = c \pm \Delta c$, м/с

8. Вычислите среднее квадратичное отклонение измеренной скорости звука по формуле $\sigma_c = \sqrt{\dfrac{1}{N-1}\sum\limits_{i=1}^{N}(c-c_i)^2}$ и запишите полученное значение в табл. 2.

9. Вычислите полуширину доверительного интервала по формуле $\Delta c = t_p(N-1)\,\sigma_c$, где $t_p(N-1)$ — квантиль Стьюдента (определяется по таблице, которая находится в лаборатории); $(N-1)$ — число степеней свободы. Рекомендуемое значение доверительной вероятности $p = 0,68$. Запишите значения квантиля Стьюдента и полученный результат в табл. 2.

10. Запишите окончательный результат в табл. 2. Сравните полученный вами результат со значением скорости упругих волн в стержне, рассчитанной по формуле (4).

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какие волны называются упругими?
2. Нарисуйте формы стоячих упругих волн в стержне для основной частоты и для первого обертона для случая, когда стержень жестко закреплен с двух торцев, подобно тому, как это было сделано на рис. 3 для стержня со свободными торцами.
3. Получите для этого случая формулу для резонансных частот, т. е. формулу, подобную (10).
4. Покажите, что размерность величины c в формуле (4) совпадает с размерностью скорости.
5. Каким способом можно изменить скорость продольных упругих волн в упругом стержне?

ЛИТЕРАТУРА

1. *Иродов И.Е.* Волновые процессы. Основные законы М.; СПб.: Физматлит, 1999.
2. *Савельев И.В.* Курс общей физики: Учеб. пособие для вузов: В 5 кн. М.: Изд-во АСТ, 2002—2003. Кн. 4: Волны. Оптика. 2002.
3. *Сивухин Д.В.* Курс общей физики. Т. I: Механика. М.: Наука, 1989.