Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования «Московский государственный
технический университет им. Н. Э. Баумана»

Голяк Иг. С., Есаков А.А., Руцкая А.М.

ИССЛЕДОВАНИЕ СВОБОДНЫХ ЗАТУХАЮЩИХ И ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ НА ПРИМЕРЕ КРУТИЛЬНОГО МАЯТНИКА

Методические указания к лабораторной работе М-108 по курсу «Общей физики»

Под ред. к.т.н., доцента Андреева А.Г.

Москва 2014 г.

Цель работы: Изучение свободных затухающих колебаний, определение амплитудно-частотных характеристик вынужденных механических колебаний, наблюдение резонанса на примере крутильного маятника.

Теоретическая часть

Механической колебательной системой называют систему, которая способна совершать периодические движения в пространстве. Если на элементы системы не действуют диссипативные силы (соответственно механическая энергия сохранятся), то колебания носят незатухающий характер, в противном случае – происходит затухание колебаний (механическая энергия постепенно рассеивается).

При отсутствии переменных внешних сил система может совершать колебания, которые называются свободными. Рассмотрим такие механические колебания на примере модели в виде груза на невесомой пружине на гладкой горизонтальной поверхности.

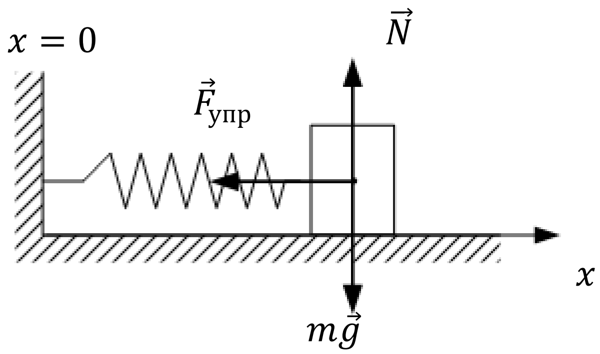

Рис. 1. Пружинный маятник.

В системе, изображенной на рис. 1, горизонтальные колебания происходят под действием только силы упругости (силы Гука). Поскольку в системе не действуют диссипативные силы, то выполняется закон сохранения механической энергии

$$E_{упр} + E_{кин} = const, \tag{1}$$

где $E_{\text{упр}}$ – потенциальная энергия упругой пружины, равная $\frac{kx^2}{2}$, $E_{\text{кин}}$ – кинетическая энергия тела, равная $\frac{m\dot{x}^2}{2}$, x – деформация пружины, $\dot{x}$ – скорость груза.

Продифференцируем выражение (1) по времени, получим

$$\frac{2kx\dot{x}}{2} + \frac{2m\dot{x}\ddot{x}}{2} = 0 \qquad (2)$$

Преобразуем выражение (2)

$$\dot{x}\left(\ddot{x} + \frac{k}{m}x\right) = 0 \qquad (3)$$

В выражении (3) один из двух сомножителей равен 0. Если постоянно равно нулю $\dot{x}$, то это означает отсутствие движения.

Во втором случае, если равен нолю второй множитель, тогда получим дифференциальное уравнение движения тела массы m относительно положения равновесия в виде

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \qquad (4)$$

Выражение (4) представляет собой дифференциальное уравнение свободных колебаний гармонического осциллятора с циклической частотой ω_0 равной $\sqrt{\frac{k}{m}}$, решением которого служит соотношение

$$x = x_m \cos(\omega_0 t + \alpha_0), \qquad (5)$$

где амплитуда x_m и начальная фаза α_0 определяются из начальных условий.

Аналогичное периодическое движение может совершать и крутильный маятник (рис. 2), представляющий собой конструкцию массой m в виде кольца, закрепленного с помощью спиц к ступице, которая сцеплена с невесомой спиральной пружиной, закрепленной на неподвижном основании. Однако в отличие от рассмотренного поступательного колебательного движения в уравнении динамики для такого маятника учтем действие сил сопротивления, и как следствие, моментов этих сил. Кинематической характеристикой движения маятника будет угол α отклонения маятника от положения равновесия.

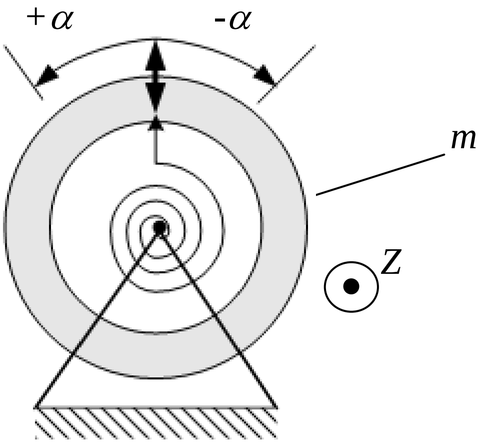

Рис.2. Крутильный маятник.

Основное уравнение динамики вращательного движения проекции на ось Z записывается в виде

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum_i M_{iZ} \quad (6)$$

где Z – направленная «на нас» ось вращения маятника, что и обозначено на рис. 2, L_Z – момент импульса маятника относительно выбранной оси Z, M_{iZ} – моменты внешних сил относительно той же оси.

Момент импульса маятника, вращающегося относительно оси Z с угловой скоростью $\dot{\alpha} = \omega$

$$L_z = J_Z\omega,$$

где J_Z – момент инерции маятника относительно оси Z. Подставим это выражение в (6) и получим

$$J_Z\varepsilon = \sum_i M_{iZ}, \quad (7)$$

где $\varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\alpha}$ – угловое ускорение маятника.

Если сумма моментов внешних сил будет равна нулю, то момент импульса сохраняется, и, как следует из (6), вращение маятника будет равномерным.

Для возникновения свободных колебаний маятника необходим возвращающий момент. В нашем случае он пропорционален углу α отклонения от положения равновесия

$$M_{\text{уп}} = -D\alpha,$$

где D – коэффициент упругости спиральной пружины.

В природе все реальные колебательные системы являются диссипативными. Механическая энергия колебаний системы убывает за счет работы против сил трения, поэтому свободные колебания всегда затухают – их амплитуда постепенно уменьшается. При наличии вязкого трения, что имеет место в рассматриваемой конструкции, момент сил сопротивления можно считать пропорциональным угловой скорости $\dot{\alpha}$

$$M_{\text{тр}} = -h\dot{\alpha},$$

Таким образом, уравнение движения (7) крутильного маятника в этом случае может быть записано в виде

$$J_Z\ddot{\alpha} = M_{\text{тр}} + M_{\text{уп}} \tag{8}$$

Подставляя в (8) выражения для момента упругих сил и момента диссипативных сил, получим однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами, которое после преобразований будет иметь вид

$$\ddot{\alpha} + 2\delta\dot{\alpha} + \omega_0^2\alpha = 0, \tag{9}$$

где $\delta = \frac{h}{2J_Z}$ - коэффициент затухания, $\omega_0^2 = \frac{D}{J_Z}$.

В общем виде решение дифференциального уравнения (9) при условии $\delta^2 < \omega_0^2$ будет выглядеть как

$$\alpha = A_0 e^{-\delta t} (\cos\omega_1 t + \varphi_0), \tag{10}$$

где $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ – циклическая частота свободных затухающих колебаний затухающей системы.

В случае большого сопротивления среды ($\delta^2 \geq \omega_0^2$) система не осциллирует. Такое поведение системы представляет собой апериодический процесс.

Подставим $t = nT_1$ в уравнение (10) затухающих колебаний, полагая $\varphi_0 = 0$. Амплитуда колебаний через n периодов обозначим A_N, с учетом $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$ получим соотношение

$$\frac{A_0}{A_N} = e^{n\delta T_1}. \tag{11}$$

Взяв натуральный логарифм от выражения (11) от отношения амплитуд смещений, следующих друг за другом через промежуток времени, равный периоду T_1, получим величину, называемую логарифмическим декрементом затухания

$$\lambda = \delta T_1 = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{A_0}{A_N}\right) = \ln\left(\frac{A_{N-1}}{A_N}\right). \tag{12}$$

Подставляя $\delta = \frac{\lambda}{T_1}$, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ и $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$ в уравнение $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$, получим выражение для периода затухающих колебаний

$$T_1 = T_0\sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{4\pi^2}}. \tag{13}$$

Следовательно, зная период незатухающих колебаний системы T_0 и логарифмический декремент затухания λ, мы можем вычислить период затухающих колебаний T_1, но экспериментально проще сначала определить T_1, а затем уже вычислить λ.

В случае вынужденных колебаний система колеблется под действием внешней вынуждающей силы, и за счет работы этой силы компенсируются потери энергии системы. Частота вынужденных колебаний зависит от частоты изменения вынуждающей силы. Уравнение колебаний в этом случае может быть получено из (9) добавлением закона изменения вынуждающего воздействия

$$J_Z\,\ddot{\alpha} + h\,\dot{\alpha} + D\alpha = M\cos\omega_2 t, \tag{14}$$

где M – амплитуда момента вынуждающей силы, ω_2 - циклическая частота вынуждающего момента.

После установления колебаний крутильный маятник колеблется в стационарном режиме с той же угловой частотой, что и источник возмущений, при этом между колебаниями может быть сдвиг по фазе $\varphi_{\text{вын}}$

$$\alpha_{\text{вын}} = A_s \cos(\omega_2 t + \varphi_{\text{вын}}), \tag{15}$$

где $\varphi_{\text{вын}}$ - разность между фазой смещения при вынужденных колебаниях и фазой момента вынуждающей силы.

Для амплитуды установившихся вынужденных колебаний A_s имеет место выражение

$$A_s = \frac{M}{J_Z\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_2{}^2\right)^2 + 4\delta^2\omega_2^2}}, \tag{16}$$

вывод которого приведен в [1].

Тогда в относительных единицах зависимость амплитуды вынужденных колебаний от циклической частоты вынуждающего момента будет иметь вид (АЧХ)

$$\frac{A_s}{A_2} = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega_2}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + 4\left(\frac{\delta}{\omega_0}\right)^2\left(\frac{\omega_2}{\omega_0}\right)^2}}, \tag{17}$$

где $A_2 = \frac{M}{\omega_0^2 J_Z}$ - постоянная величина для колебательной системы.

В случае отсутствия потерь на трение $(\delta = 0)$ теоретически амплитуда при $\omega_2 = \omega_0$ бесконечно возрастает и может привести к «катастрофическому резонансу» (см. рис. 3). $A_s \to \infty$ из (16).

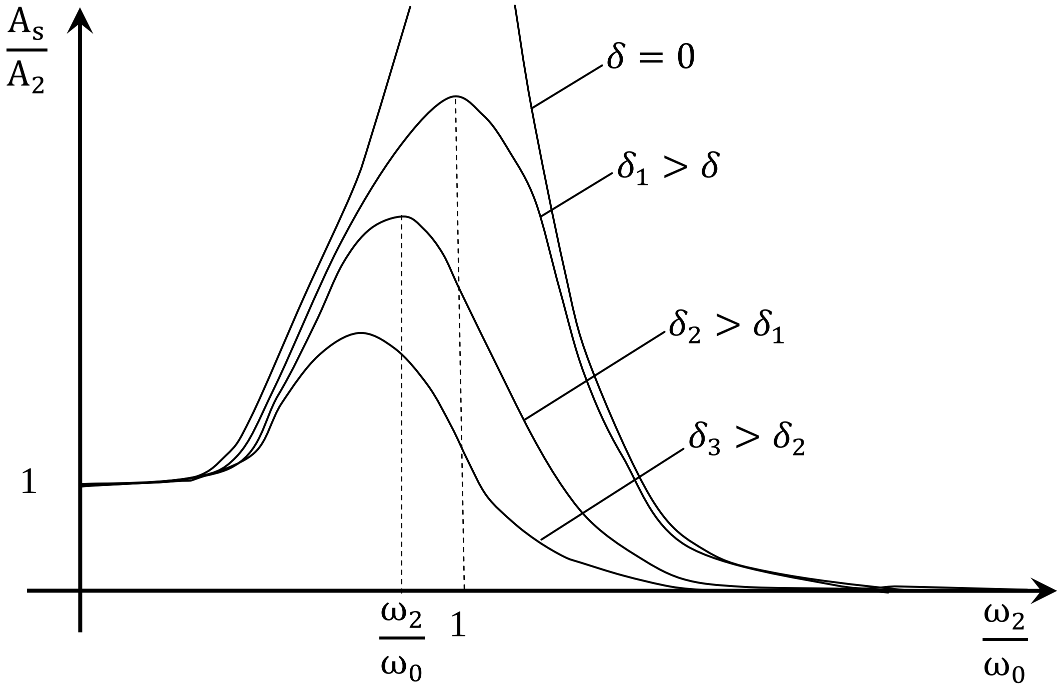

Рис. 3. Амплитудно-частотная характеристика вынужденных колебаний.

В случае колебаний с малым коэффициентом затухания амплитуда вынужденных колебаний достигает максимума, когда циклическая частота вынуждающей силы $\omega_{2\ \text{рез}}$ ниже частоты собственных колебаний системы. Эта частота, называемая резонансом, получается из

$$\omega_{2\ \text{рез}} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{2\delta^2}{\omega_0^2}} \tag{18}$$

Сильное затухание не только удаляет $\omega_{\text{рез}}$ от ω_0, но и уменьшает амплитуду резонанса (рис. 3). Для сдвига фазы системы $\varphi_{\text{вын}}$ справедливо следующее соотношение

$$\varphi_{\text{вын}} = arctg\left(\frac{2\delta\omega_2}{\omega_2^2 - \omega_0^2}\right) \tag{19}$$

В случае затухающих колебаний ($\delta > 0$), при $\omega_2 < \omega_0$, $0 \le \varphi_{\text{вын}} \le 90°$ и, когда $\omega_2 > \omega_0$, $90° \le \varphi_{\text{вын}} \le 180°$ (рис. 4). Это необходимо учитывать в измерительной технике, и выбрать датчики с собственной частотой ω_0 значительно большей, чем частота измеряемых колебательных величин для уменьшения ошибок измерения.

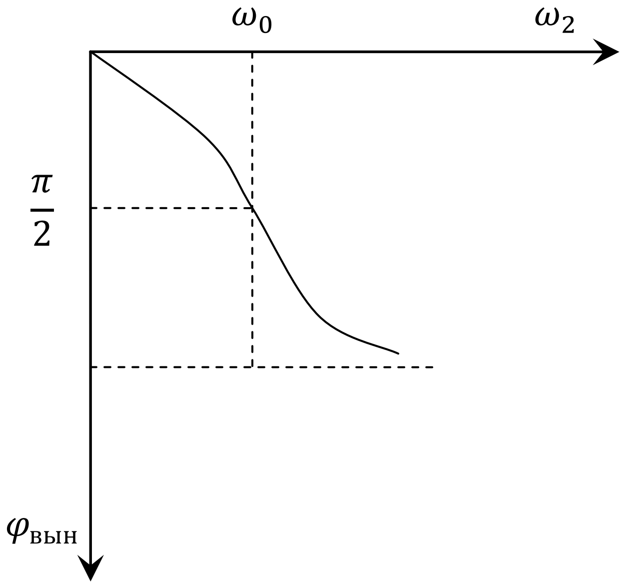

Рис. 4. Фазово-частотная характеристика колебательной системы в случае затухающих колебаний.

В случае незатухающих колебаний ($\delta = 0$), $\varphi_{\text{вын}} = 0°$ для $\omega_2 < \omega_0$ и $\varphi_{\text{вын}} = 180°$ для $\omega_2 > \omega_0$ (рис. 5).

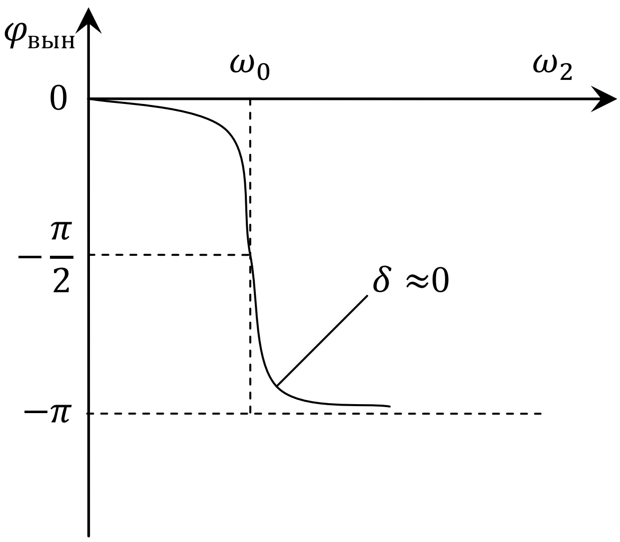

Рис. 5. Фазово-частотная характеристика колебательной системы в случае малого затухания.

Экспериментальная часть

Описание и принцип работы установки

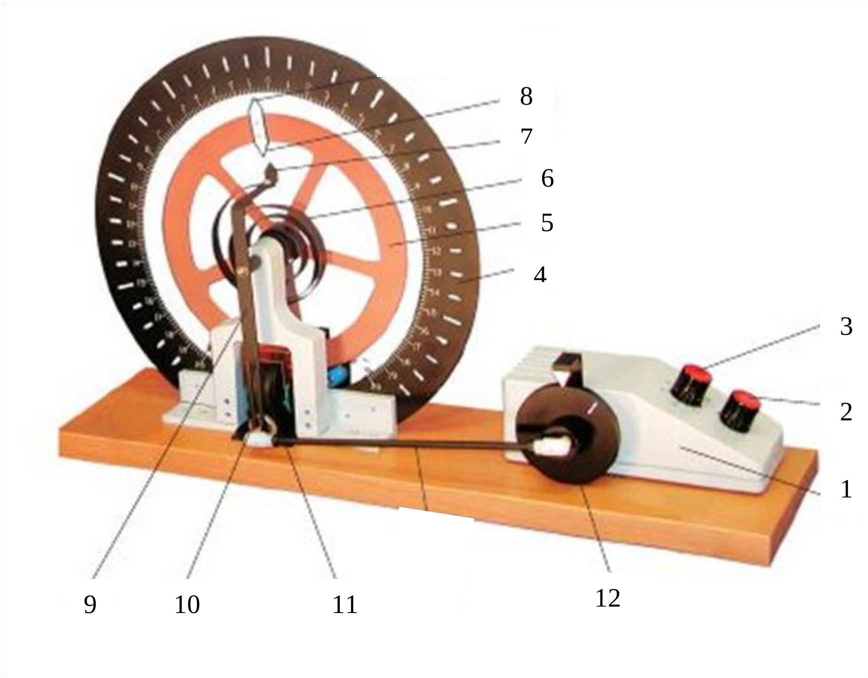

Рис. 6. Внешний вид установки.

Устройство маятника

1) Корпус электромотора, скорость вращения которого зависит от напряжения питания;
2) Ручка точной настройки напряжения питания электромотора;
3) Ручка грубой настройки напряжения питания;
4) Шкала для измерения углов отклононения маятника;
5) Маятник;
6) Спиральная пружина;
7) Стрелка-указатель углового положения возбуждающего устройства;
8) Стрелка-указатель отклонения маятника;
9) Источник возмущений, связанный одним из концов с пружиной;
10) Индукционный тормоз;
11) Шатун;
12) Эксцентрик;

Крутильный маятник состоит из деревянного основания с колебательной системой и электромотором на нем. Колебательная система представляет собой медное кольцо со спицами и ступицей (5), соединенное с рычагом посредством спиральной пружины (6), которая обеспечивает возвращающий момент. С помощью ручек грубой и точной настройки задается вращение электромотора крутильного маятника. В движение маятник приводится эксцентриком (12) с шатуном (11), который раскручивает пружину, а затем сжимает ее с периодической последовательностью и тем самым инициирует колебание медного кольца. Индукционный тормоз (10) используется для изменения затухания. Шкала с прорезями (4) и ценой деления 2 мм. расположена на внешней стороне колебательной системы; регуляторы скорости (2), (3) вращения двигателя расположены на корпусе (1).

Задание А. Определение логарифмического декремента затуханий при отсутствии протекания тока в индукционном тормозе

1). Определите период T_1 колебаний маятника. Для вычисления периода необходимо отклонить маятник на 15 делений и измерить время n=10 полных колебаний маятника. Период вычислить из соотношения $T_1 = \frac{t}{n}$.

2). Определите частоту колебаний по известному периоду из соотношения $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$.

3). Отклоните маятник на угол, соответствующий 15 делениям и зафиксируйте максимальные отклонения маятника в конце каждого из 5ти периодов (A). Измерения повторить 4 раза. Данные занести в табл.1.

Вычислите среднее значение амплитуды

$$< A_N > = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}(A_{Ni})$$

Для вычисления λ_N воспользуйтесь выражением $\lambda_N = \ln\left(\frac{<A_{N-1}>}{<A_N>}\right)$.

(данные занести в табл. 1).

Таблица 1.

Период (N)	A, делений				$< A_N >$	λ_N
0	15	15	15	15	15	
1						
2						
3						
4						
5						
$< \lambda >=$						

Для вычисления коэффициента затухания δ, воспользуйтесь соотношением

$$\delta = \frac{<\lambda>}{T_1},$$

где $< \lambda >$ – среднее значение логарифмического декремента затухания.

Частоту собственных колебаний крутильного маятника находится из соотношения

$$\omega_0 = \sqrt{\left(\frac{2\pi}{T_1}\right)^2 + \delta^2}.$$

Убедитесь, что при малом затухании колебания практически гармонические. Если при отсутствии тока в индукционном тормозе частоты ω_0 и ω_1 заметно отличаются, то определите время релаксации по формуле $\tau = \frac{1}{\delta}$ и проверьте найденное время экспериментально.

5) Для экспериментального определения τ этого отклоните маятник на угол ~ 15 делений и определите время $\tau_{экс}$, в течение которого амплитуда колебаний уменьшится в $e = 2{,}7$ раза, т.е. до значения $5{,}4 - 5{,}6$ делений. Сравните полученную величину с ранее вычисленным значением τ.

Задание Б. Изучение зависимости коэффициента затуханий от тока, питающего индукционный тормоз.

1) Определите коэффициент затухания δ как функцию тока I, протекающего через электромагниты. Эксперимент такой же, как в Задании А, но проводится с индукционным тормозом при значениях тока $I = 0{,}25\ A, I = 0{,}4\ A, I = 0{,}6\ A, I = 0{,}8\ A.$. Данные занесите в табл. 2.

Таблица 2

$I = \cdots A$

Период	A				$< A >$	λ
0	15	15	15	15	15	
1						
2						
3						
4						
5						
$\langle\lambda\rangle = \frac{1}{5}\sum_{i=0}^{5}\lambda_i =$						

2) Постройте графики зависимости коэффициента затухания от силы тока $\delta = f(I)$.

3) Пронаблюдайте за характером движения маятника при большом коэффициенте затухания. Для этого установите значение тока индукционного тормоза в диапазоне 1,4-1,6 А. Отклоните маятник на 15 делений в любую строну и отпустите. Результаты наблюдений запишите в тетради.

Задание В. Исследование амплитудно-частотных характеристик вынужденных колебаний при малых затуханиях **(**при отсутствии протекания тока в индукционном тормозе).

1) Определите амплитуду вынужденных колебаний как функцию циклической частоты возбуждения (напряжения, питающего двигатель привода эксцентрика). Для этого выставьте напряжение электромотора на 5 В и замерьте отклонение маятника после установления колебаний. Увеличивая напряжение с шагом 0,5 В и выжидая на каждом шаге установления колебаний, плавно дойдите до 9 В. Данные занесите в табл. 3. Время установления колебаний составляет порядка половины минуты.

Таблица 3

Напряжение электромотора, В	$A_{I=0}$	$A_{I=0,4}$	$A_{I=0,8}$
5,0			
5,5			
…			
9,0			

Собственная угловая частота системы ω_0 получается из соотношения

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \approx \frac{2\pi}{T_1}, \text{ при } \delta \to 0.$$

При увеличении напряжения электродвигателя больше 6,5 В будет происходить наибольше смещение, т.е. возникает резонанс. При напряжении, большем 9 В амплитуда колебаний спадает.

2) Повторите эксперимент п.1 при двух значениях силы тока индукционного тормоза: $I = 0{,}4\ A$ и $I = 0{,}8\ A$. Измерения занесите в табл. 3.

3) Откладывая амплитуду в зависимости от напряжения электродвигателя, постройте графическую интерпретацию трех измеренных значений $A = f(u)$ (В данной установке частота вынуждающей силы пропорциональна амплитуде напряжения электромотора).

4) Область резонанса может быть установлена путем нахождения полуширины значения амплитуды колебаний из графической зависимости от частоты (амплитуды вынужденных колебаний от частоты).

5) Пронаблюдайте явление резонанса, установив найденное из графика напряжение на электромоторе. Результаты наблюдения запишите в тетради. (Попытайтесь найти точное значение напряжения на электромоторе, при котором наблюдается максимальная амплитуда отклонений (резонанс).

Контрольные вопросы

1. Какие колебания называются вынужденными?
2. Какая сила играет роль вынуждающей для маятника?
3. Чем определяется циклическая частота свободных колебаний маятника?
4. Что такое резонанс? Когда он происходит?
5. Способ получения формулы (16)?

Литература

1. Савельев И.В. Общий курс физики. Том 1: механика колебания и волны, молекулярная физика. М.: Наука. 1991 г. Часть 2. Глава 9.
2. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Том 1: механика. М.: 1979 г. Глава 6.
3. Киттель Ч. Найт У. Рудерман М. Берклеевский курс физики. Том 1. Механика. М.: Наука. 1971 г. Глава 7.
4. Еркович С.П. Применение регрессионного и корреляционного анализа для исследования зависимостей в физическом практикуме. М.: МГТУ. 1994. 7 с.3