

Хаустова В. И.
ИЗУЧЕНИЕ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ МАЯТНИКА С ДВИЖУЩЕЙСЯ ТОЧКОЙ
ПОДВЕСА

Методические указания к лабораторной работе М-13 по курсу общей физики.
Под редакцией В. Н. Корчагина.
МГТУ, 1990.

Кратко изложена теория вынужденных колебаний, дана методика проведения эксперимента по изучению вынужденных колебаний маятника с движущейся точкой подвеса. Для студентов 1-го курса МГТУ.

Цель работы - изучение вынужденных колебаний физического маятника с движущейся точкой подвеса, получение зависимости амплитуды и фазы вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Вынужденными называют колебания, возникающие в колебательной системе под действием периодически меняющейся внешней силы

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_0 \cos \omega t$$

Если внешняя периодическая сила начала действовать на колеблющееся тело, то его движение в течение определенного промежутка времени зависит от начальных условий, т.е. от движения тела в момент начала действия силы. С течением времени влияние начальных условий ослабевает и движение тела переходит в режим вынужденных установившихся гармонических колебаний. Независимо от начальных условий после некоторого промежутка времени тело будет совершать одни и те же установившиеся гармонические колебания. Процесс установления колебаний называют переходным режимом.

Если в момент начала действия периодической внешней силы колебаний не было, то и в этом случае вынужденные колебания не мгновенно достигнут своего стационарного режима, т.е. также имеет место переходный режим.

Рассмотрим вынужденные колебания физического маятника. Физическим маятником называют твердое тело, подвешенное на неподвижной горизонтальной оси в поле тяготения, причем точка подвеса O не совпадает с центром масс тела C (рис. 1). Любая точка такого маятника движется

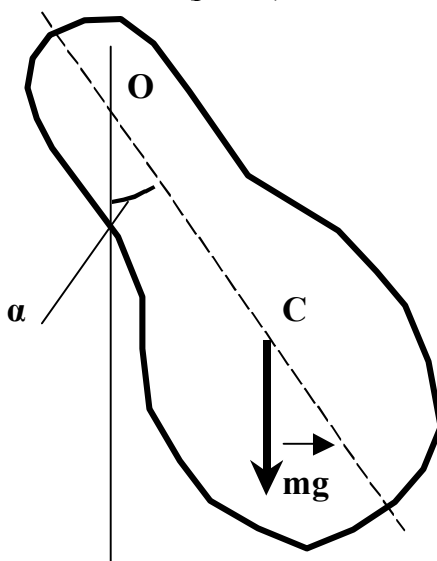


Рис. 1

периодически по дуге окружности, т.е. движение маятника между крайними положениями - вращательное. Поэтому для описания движения маятника следует воспользоваться основным уравнением динамики вращательного движения:

$$I\varepsilon = \sum_i M_i$$

где I - момент инерции тела относительно оси, проходящей через точку подвеса O , ε - угловое ускорение маятника, $\sum M_i$ - сумма моментов всех сил, действующих на маятник, относительно той же неподвижной оси.

Назовем эти силы и моменты. В поле тяготения на маятник действует сила $m\vec{g}$. При отклонении маятника на малый угол α от положения равновесия эта сила создает вращающий момент учитывая, что для малых углов $\sin\alpha \approx \alpha$,

$$M_1 = -m g l_1 \alpha,$$

где l_1 - расстояние от точки подвеса тела до центра масс.

Знак "-" в уравнении означает, что момент силы M_1 направлен так, что стремится вернуть маятник в положение равновесия.

На маятник также действует интегральная сила сопротивления со стороны среды, препятствующая его движению:

$$F_{\text{сопр}} = -r \frac{d\alpha}{dt} = -r\dot{\alpha}$$

где r - коэффициент, зависящий от свойств среды, формы и геометрических размеров тела, $d\alpha/dt = \dot{\alpha}$ - угловая скорость. Эта сила приводит к возникновению момента силы сопротивления

$$M_2 = F_{\text{сопр}} l_2 = -r l_2 \dot{\alpha},$$

где l_2 - плечо интегральной силы сопротивления.

Кроме того, при вынужденных колебаниях физического маятника на него еще действует внешняя вынуждающая сила $F = F_0 \cos \omega t$, создающая вращательный момент

$$M_3 = F l_3 = F_0 l_3 \cos \omega t,$$

где F_0 , l_3 , ω - амплитуда, плечо, круговая частота вынуждающей силы соответственно.

Следует заметить, что на маятник действует сила со стороны опоры, но она не создает момента относительно указанной оси вращения.

Таким образом, с учетом сказанного уравнение движения физического маятника, совершающего вынужденные колебания, имеет следующий вид:

$$I\varepsilon = -mgl_1 - r l_2 \dot{\alpha} + F_0 l_3 \cos \omega t \quad (1)$$

Учитывая, что $\varepsilon = d^2\alpha/dt^2 = \ddot{\alpha}$, и вводя обозначения $mgl_1 = k'$, $r l_2 = h$, $F_0 l_3 = M_0$ уравнение (1) можно представить в виде

$$I\ddot{\alpha} = -k'\alpha - h\dot{\alpha} + M_0 \cos \omega t$$

или

$$\ddot{\alpha} + \frac{h}{I} \dot{\alpha} + \frac{k'}{I} \alpha = \frac{M_0}{I} \cos \omega t \quad (2)$$

Уравнение (2) есть линейное неоднородное (с правой частью) дифференциальное уравнение второго порядка.

Известно, что коэффициенты при $\dot{\alpha}$ и α в дифференциальном уравнении второго порядка имеют вполне определенный смысл: коэффициент при $\dot{\alpha}$ характеризует затухание, а коэффициент при α : есть квадрат круговой частоты собственных незатухающих колебаний.

Учитывая это, обозначим: $h/I = 2\beta$, где β - коэффициент затухания; $k/I = \omega_0^2$, где ω_0 - круговая частота собственных незатухающих колебаний. Тогда уравнение (2) примет вид

$$\ddot{\alpha} + 2\beta\dot{\alpha} + \omega_0^2\alpha = \frac{M_0}{I} \cos\omega t \quad (3)$$

Из теории дифференциальных уравнений известно, что общее решение неоднородного дифференциального уравнения складывается из общего решения однородного уравнения

$$\ddot{\alpha} + 2\beta\dot{\alpha} + \omega_0^2\alpha = 0 \quad (4)$$

и частного решения неоднородного уравнения (3).

Общее решение однородного уравнения (4) имеет вид

$$\alpha_1 = a e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t + \varphi'), \quad (5)$$

где a, φ' - произвольные постоянные, определяемые из начальных условий,

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \quad (6)$$

Это решение описывает затухающие колебания.

Частное решение неоднородного дифференциального уравнения (3) следует искать в виде

$$\alpha = \alpha_0 \cos(\omega'' t - \varphi), \quad (7)$$

где α_0 - амплитуда колебания, ω'' - круговая частота колебаний маятника, φ - начальная фаза колебаний.

В данном случае начальную фазу удобнее обозначить через $-\varphi$, так как вынужденные колебания, как будет показано ниже, отстают по фазе от вынуждающей силы.

Для определения ω'' , α_0 и φ продифференцируем выражение (7) по времени, т.е. выразим $\dot{\alpha}$ и $\ddot{\alpha}$. Возьмем первую производную от α по t : $\dot{\alpha} = -\alpha_0 \omega'' \sin(\omega'' t - \varphi)$. Для удобства дальнейших действий умножим $\dot{\alpha}$ на 2β :

$$2\beta\dot{\alpha} = 2\beta\alpha_0 \omega'' \sin(\omega'' t - \varphi) = 2\beta\alpha_0 \omega'' \cos(\omega'' t - \varphi + \frac{\pi}{2}) \quad (8)$$

Это как раз и есть одно из слагаемых уравнения (3).

Найдем вторую производную от α по t :

$$\ddot{\alpha} = -\alpha_0 (\omega'')^2 \cos(\omega'' t - \varphi) = \alpha_0 (\omega'')^2 \cos(\omega'' t - \varphi + \pi) \quad (9)$$

Подставим (8) и (9) в уравнение (3)

$$\begin{aligned} \alpha_0 (\omega'')^2 \cos(\omega'' t - \varphi + \pi) + 2\beta\alpha_0 \omega'' \cos(\omega'' t - \varphi + \frac{\pi}{2}) + \\ + \alpha_0 \omega_0^2 \cos(\omega'' t - \varphi) = \frac{M_0}{I} \cos\omega t \end{aligned} \quad (10)$$

Из уравнения (10) следует, что частота вынужденных колебаний маятника ω'' должна быть равна частоте вынуждающей силы ω . Действительно, выражения, записанные в левой части уравнения (10), описывают колебания системы с одинаковой частотой ω'' , при сложении которых получается результирующее колебание с той же частотой. Но из правой части уравнения (10) видно, что это результирующее колебание происходит с частотой вынуждающей силы ω . Следовательно, уравнение (10) справедливо только при условии, что $\omega'' = \omega$. С учетом этого можно записать:

$$\alpha_0 \omega^2 \cos(\omega t - \varphi + \pi) + 2\beta\alpha_0 \omega \cos(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}) + \alpha_0 \omega_0^2 \cos(\omega t - \varphi) = \frac{M_0}{I} \cos\omega t$$

Воспользуемся теперь методом векторных диаграмм, считая, что колебание по закону $(M_0/I)\cos\omega t$ получено в результате сложения трех колебаний, описываемых уравнениями $\alpha_0\omega_0^2\cos(\omega t-\varphi)$, $2\beta\alpha_0\omega\cos(\omega t-\varphi+\pi/2)$, $\alpha_0\omega^2\cos(\omega t-\varphi+\pi)$ с той же частотой (рис. 2).

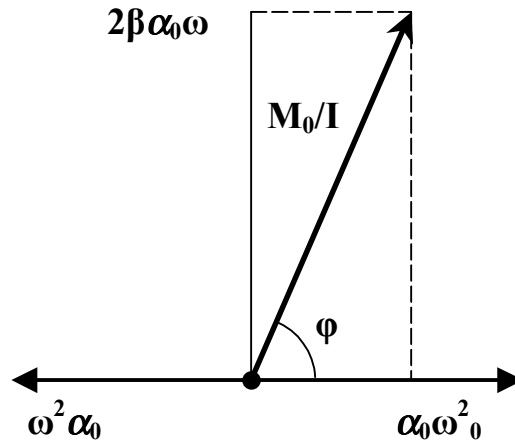


Рис.2

Первое $[\alpha_0\omega_0^2\cos(\omega t-\varphi)]$ изобразим вектором, длиной $\alpha_0\omega_0^2$, направленным вправо, второе $[2\beta\alpha_0\omega\cos(\omega t-\varphi+\pi/2)]$ - вектором, длиной $2\beta\alpha_0\omega$, повернутым относительно вектора $\alpha_0\omega_0^2$ на угол $\pi/2$, а третье $[\alpha_0\omega^2\cos(\omega t-\varphi+\pi)]$ - вектором, длиной $\alpha_0\omega^2$, повернутым относительно вектора $\alpha_0\omega_0^2$ на угол π . Сумма этих векторов должна совпадать с вектором, изображающим колебание по закону $(M_0/I)\cos\omega t$. Это возможно лишь тогда, когда

$(M_0/I)^2 = \alpha_0^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\beta\alpha_0\omega)^2$, т.е. амплитуда вынужденных колебаний α_0 должна быть равна

$$\alpha_0 = \frac{M_0/I}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \quad (11)$$

Векторная диаграмма позволяет также определить фазу колебания:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (12)$$

Подставив значения α_0 и φ в выражение (7), получим частное решение неоднородного дифференциального уравнения:

$$\alpha = \frac{M_0/I}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \cos(\omega t - \operatorname{arctg} \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}), \quad (13)$$

которое в сумме с общим решением (5) однородного уравнения дает общее решение уравнения (3).

Слагаемое $\alpha_1 = \alpha_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t + \varphi')$ играет заметную роль только на начальной стадии процесса (в переходном режиме), поэтому по истечении времени $t = \tau = 1/\beta$ этим слагаемым можно пренебречь. Окончательно закон вынужденных колебаний физического маятника задается уравнением (13).

Таким образом, под влиянием внешней гармонической силы физический маятник совершает вынужденные колебания с частотой вынуждающей силы.

Кривая, описывающая зависимость амплитуды вынужденных установившихся колебаний от частоты внешней силы, называется амплитудно-частотной характеристикой. Формула (11) представляет собой аналитическое выражение амплитудно-частотной характеристики, а ее (графическое изображение приведено на рис. 3).

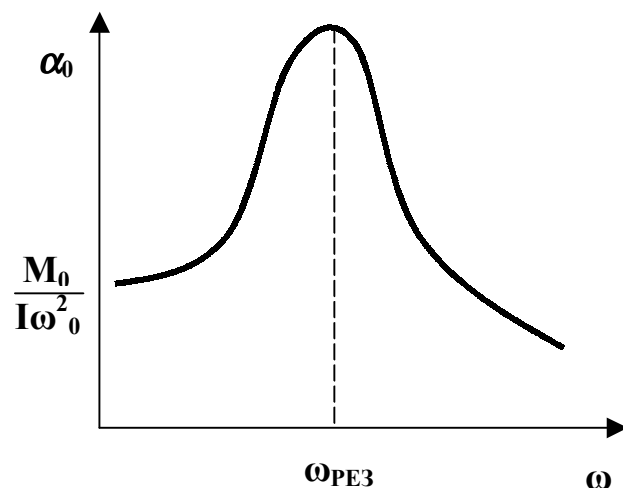


Рис. 3

Максимальное значение амплитуды достигается при частоте внешней силы $\omega = \omega_{РЕЗ}$. Чтобы определить значение $\omega_{РЕЗ}$, необходимо функцию $\alpha_0(\omega)$, задаваемую уравнением (11), исследовать на экстремум, т.е. $d\alpha_0/d\omega = 0$. Это исследование дает значение $\omega_{РЕЗ} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$. При малом затухании β резонансная частота близка к частоте собственных незатухающих колебаний маятника, т.е. $\omega_{РЕЗ} \approx \omega_0$. Такое явление резкого возрастания амплитуды колебаний при совпадении частоты вынуждающей силы с частотой собственных колебаний маятника (при малом β) называется резонансом, а соответствующая ему частота - резонансной частотой. При малых значениях частоты вынуждающей силы ($\omega \rightarrow 0$) амплитуда колебаний при малом β [см. уравнение (11)] стремится к $M_0/(I\omega_0^2)$, а при больших значениях частоты вынуждающей силы ($\omega \rightarrow \infty$) амплитуда колебаний приближается к $M_0/(I\omega^2) \rightarrow 0$. Зависимость фазы вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы называют фазочастотной характеристикой (рис. 4).

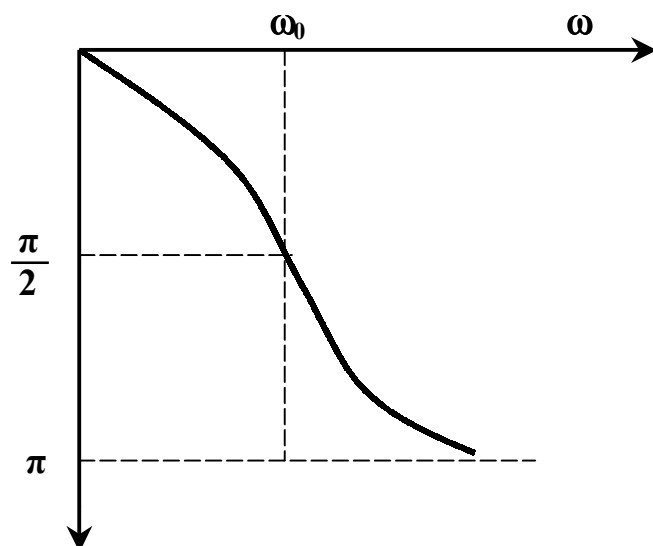


Рис. 4

При малых частотах $\omega \ll \omega_{РЕЗ}$ фаза мала. Это означает, что смещение отстает по фазе от силы на очень небольшую величину. При резонансе смещение отстает от силы по фазе на $\pi/2$, т.е. в тот момент, когда сила достигает максимального значения, смещение равно нулю, а когда сила равна нулю, смещение максимально.

При дальнейшем нарастании частоты отставание смещения от силы увеличивается и при $\omega \gg \omega_0$ приближается к π , т.е. смещение и сила направлены почти противоположно.

Эти фазовые соотношения позволяют глубже понять сущность резонанса. Учитывая, что при колебаниях скорость опережает по фазе смещение на $\pi/2$, а при резонансе сила опережает по фазе смещение на $\pi/2$, получаем, что сила все время совпадает по направлению со скоростью. Работа внешней силы достигает при резонансе максимального значения. Следовательно, резонанс характеризуется наличием максимально возможных благоприятных условий для передачи энергии от источника внешней силы к колеблющемуся телу.

В настоящей работе рассматриваются малые колебания маятника, точка подвеса которого совершает гармонические колебания. Рассмотрим движение этого маятника в системе отсчета, связанной с точкой подвеса, т.е. в неинерциальной системе отсчета. Роль вынуждающей силы в этом случае играет сила инерции $F_{ин}$.

Пусть точка подвеса движется по закону $x = b \cos \omega t$ тогда вынуждающая сила

$F_{ин} = -ma = -b\omega^2 \cos \omega t$, а ее момент $M = mb l \omega^2 \cos \omega t$. Здесь m - масса маятника, b - амплитуда колебаний точки подвеса, l - плечо силы, ω - частота вынуждающей силы.

Движение маятника в этом случае описывается уравнением, аналогичным уравнению (1):

$$I\ddot{\alpha} = -k'\alpha - h\dot{\alpha} + bm/\omega^2 \cos \omega t$$

или

$$\ddot{\alpha} + 2\beta\dot{\alpha} + \omega_0^2\alpha = \frac{bm/\omega^2}{I} \cos \omega t$$

Установившиеся вынужденные колебания такого маятника совершаются по закону

$$\alpha = \alpha_0 \cos(\omega t - \varphi)$$

где

$$\alpha_0 = \frac{mb l \omega^2 / I}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{2\beta \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

т.е. амплитуда и фаза вынужденных колебаний зависят от частоты вынуждающей силы.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

Описание установки

Установка состоит из большого и малого физических маятников. Большой физический маятник представляет собой стержень АВ (рис. 5) с двумя массивными чечевицами C_1 и C_2 , которые могут перемещаться по стержню. Опираясь призмой в точке О на подставку, маятник может совершать колебания в вертикальной плоскости. Перемещение чечевиц по стержню позволяет изменять момент инерции маятника и, следовательно, период его колебаний. Угловое отклонение большого маятника от положения равновесия определяется по шкале М.

Малый маятник выполнен в виде шарика Д на стальной спице. Он прикреплен к большому маятнику в точке Е на расстоянии a от оси вращения большого маятника так, что точка подвеса малого маятника совершает гармонические колебания.

При колебаниях большого маятника малый маятник совершает вынужденные колебания. Если

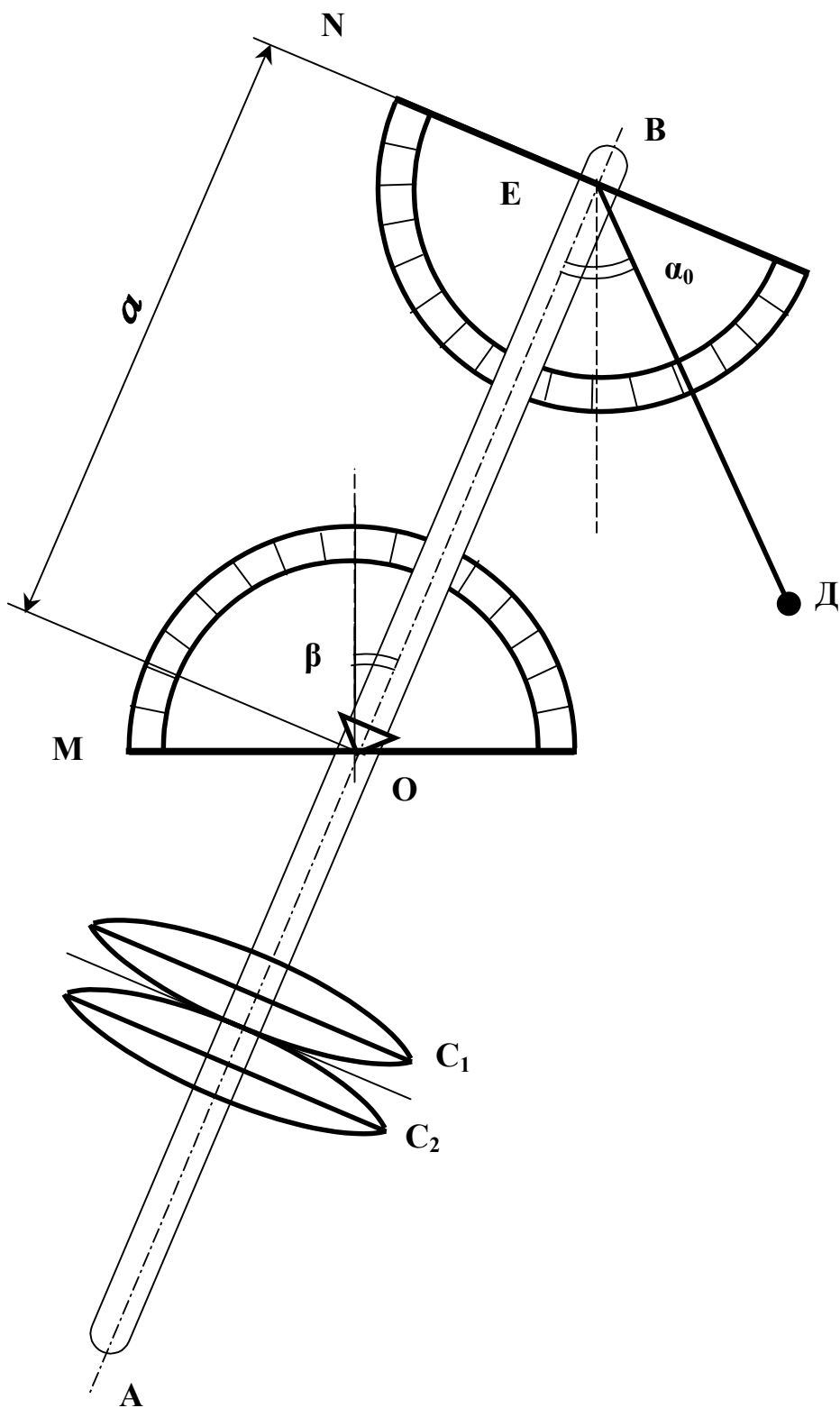


Рис.5

угол отклонения большого маятника незначителен, то точку подвеса можно считать движущейся по горизонтальной прямой. Затухание колебаний большого маятника за время эксперимента мало. Это позволяет считать его колебания незатухающими.

Угловая амплитуда α_0 установившихся вынужденных колебаний малого маятника, определяется по шкале N. Отсчет угловой амплитуды производится после установления вынужденных колебаний.

Начальное отклонение большого маятника от положения равновесия во всех экспериментах должно быть строго постоянным и не превышать 5° .

Экспериментальное задание.

Задание 1. Исследование переходного периода,

1. Определить частоту ω_1 собственных колебаний малого маятника. Для этого отклонить его на угол $\sim 10^\circ$ и измерить время десяти полных колебаний. Измерения повторить 5 раз. Вычислить для $N=10$ среднее значение $\langle t \rangle$, $\omega_1 = 2\pi N / \langle t \rangle$, $\Delta\omega$. Здесь и далее рекомендуется пользоваться материалом, приведенным в приложении.

2. Определить коэффициент затухания β малого маятника. Для этого измерить время t_5 пяти полных колебаний, фиксируя начальную α_1 и конечную α_5 амплитуды колебаний малого маятника. Данные занести в табл. 1

Таблица 1

Номер п/п	$t_5, \text{с}$	$\alpha_1, ^\circ$	$\alpha_5, ^\circ$	$\langle \beta \rangle \pm \Delta\beta$
1				
2				
3				
4				
5				
	$\langle t_5 \rangle =$	$\langle \alpha_1 \rangle =$	$\langle \alpha_5 \rangle =$	
	$\Delta t_5 =$	$\Delta \alpha_1$	$\Delta \alpha_5 =$	

Для вычисления β определим отношение первой и пятой амплитуд колебаний маятника:

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_5} = \frac{\alpha_{10} e^{-\beta t}}{\alpha_{10} e^{-\beta(t+t_5)}}$$

Откуда

$$\beta = \frac{1}{t_5} \ln \frac{\alpha_1}{\alpha_5}$$

Вычислить значения $\langle t_5 \rangle$, $\langle \alpha_5 \rangle$, β , $\Delta\beta$; результаты занести в табл. 1.

3. Определить время переходного режима по формуле

$$\tau = 1/\beta$$

4. Найти экспериментально время затухания. Для этого отклонить малый маятник на угол $\sim 10^\circ$ и определить время, в течение которого амплитуда колебаний уменьшится в $e=2,7$ раза, т.е. до значения $3,5^\circ$. Сравнить с $\tau_{\text{ПЕР}}$.

Задание 2. Получение амплитудной характеристики вынужденных колебаний.

1. Убедиться, что время десяти колебаний большого маятника больше времени переходного режима.

2. Измерить время десяти колебаний большого маятника и амплитуду α_0 установившихся вынужденных колебаний малого маятника при самом нижнем положении чечевиц (одна над другой). Амплитуду α_0 измерять после того, как найдено время t . Измерения t и α_0 при указанном положении чечевиц повторить 5 раз, результаты занести в табл. 2.

Таблица 2

Положение чечевиц	t					$\langle t \rangle$	ω	α_0					$\langle \alpha_0 \rangle$
	1	2	3	4	5			1	2	3	4	5	
1													
2													
3													

3. Перемещать чечевицы и закрепить их последовательно через три отверстия (до конца стержня). Измерять при каждом положении чечевиц t и α_0 , как указано в п. 2. Результаты заносить в табл. 2. Обнаружив максимальное значение α_0 , сделать дополнительно два измерения t и α_0 , перемещая чечевицы на одно отверстие выше и ниже того положения чечевиц, где было зафиксировано максимальное значение.

4. Вычислить $\langle t \rangle$, $\omega = 2\pi N / \langle t \rangle$, $\langle \alpha_0 \rangle$ результаты занести в табл. 2 ($N=10$).

5. Убедиться в том, что частота вынужденных колебаний малого маятника равна частоте колебаний большого маятника. Проверку провести при любом положении чечевиц.

6. Построить график зависимости $\langle \alpha_0 \rangle$ от ω .

Задание 3. Получение фазовой характеристики вынужденных колебаний.

1. Определить частоту ω_0 собственных колебаний малого маятника (использовать результаты, полученные в задании 1).

2. Вычислить φ для различных значений ω . Поскольку при $\omega = \omega_{\text{рез}}$ функция $\text{tg}\varphi$ разрывна, для нахождения φ следует использовать формулу

$$\varphi = \arcsin(2\beta\omega / \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2})$$

которую можно легко получить (см. рис. 2). При $\omega > \omega_{\text{рез}}$, $\varphi > \pi/2$, следовательно, в этом случае вычисление φ необходимо вести по формуле

$$\varphi = \pi - \arcsin(2\beta\omega / \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}).$$

Полученные данные занести в табл. 3.

Таблица 3

ω, c^{-1}	
$\varphi, \text{рад}$	

3. Построить график зависимости фазы вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы [$\varphi = f(\omega)$].

Примечание. При построении графиков соединять экспериментальные точки ломаной линией не следует, нужно провести плавную кривую как можно ближе к экспериментальным точкам. Помня, что погрешность обоих знаков равновероятна (поэтому и пишут $\pm \Delta x$) правильность проведения экспериментальной кривой можно проконтролировать тем, что экспериментальные точки, через которые не прошла кривая, примерно в одинаковом количестве находятся по разные стороны от проведенной кривой.

Контрольные вопросы.

1. Какие колебания называются вынужденными?
2. Какая сила играет роль вынуждающей для малого маятника?
3. Чем определяется частота колебаний большого маятника?
4. Чем определяется частота колебаний малого маятника?
5. Что такое резонанс? Когда он происходит?

Литература

1. Матвеев А.Н. Механика и теория относительности. - М.: Высшая школа, 1986. - 320 с.
2. Савельев И.В. Курс общей физики. - М.: Наука, 1970. Т. 1.
3. Савельева А.И., Фетисов И.Н. Обработке результатов измерений при проведении физического эксперимента. - М.: МВТУ, 1984.
4. Беззубов Ю.И., Иванова Т.Я. Методические указания по выполнению графических работ в физическом практикуме. - М.: МВТУ, 1986.
5. Строганова И.С., Хаустова В.И. Изучение вынужденных колебаний маятника с движущейся точкой подвеса. - М.: МВТУ, 1981.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Оценка случайной погрешности измерения

Доверительный интервал для измеряемых величин t и α_0 следует вычислять по формуле

$$\Delta x = t_{p,f} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \langle x \rangle)^2}{n(n-1)}}$$

где под x подразумевается t или α , $t_{p,f} = 2,8$ (определяют по графику или таблицам для пяти измерений при доверительной вероятности $P=0,95$), см. работу М-1.

Для $\omega = 2\pi N / \langle t \rangle$ доверительный интервал $\Delta \omega = \omega \Delta t / \langle t \rangle$.

Доверительный интервал для коэффициента затухания β вычисляют по формуле

$$\Delta \beta = \sqrt{\left(\frac{\partial \beta}{\partial \tau} \Delta \tau\right)^2 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial \alpha_1} \Delta \alpha_1\right)^2 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial \alpha_\tau} \Delta \alpha_\tau\right)^2},$$

где

$$\frac{\partial \beta}{\partial \tau} = -\frac{\ln(\langle \alpha_1 \rangle / \langle \alpha_\tau \rangle)}{\langle \tau \rangle^2}, \quad \frac{\partial \beta}{\partial \alpha_1} = \frac{1}{\langle \tau \rangle} \frac{\langle \alpha_\tau \rangle}{\langle \alpha_1 \rangle}, \quad \frac{\partial \beta}{\partial \alpha_\tau} = \frac{1}{\langle \tau \rangle} \frac{1}{\langle \alpha_1 \rangle \langle \alpha_\tau \rangle}.$$