

Андреев А. Г.

Момент инерции и крутильные колебания

Теоретическая часть

Цель работы. Ознакомление с динамическими характеристиками вращательного движения твёрдого тела, экспериментальное определение моментов инерции тел различной формы, проверка теоремы Штейнера-Гюйгенса.

Движение тела в пространстве можно рассматривать как совокупность поступательного и вращательного перемещений. Кинематические характеристики этих двух движений и взаимосвязь характеристик подробно проанализированы в разделе "Кинематика" [1]. Важной динамической характеристикой поступательного движения тела и системы тел является импульс, изменение которого происходит при наличии внешнего воздействия на тело или систему. Связь импульса и скорости тела или системы $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$ обеспечивает однонаправленность этих векторов, а масса выступает как мера инертных свойств тела (системы) в поступательном движении.

Аналогичной по важности динамической характеристикой тела во вращательном движении является момент импульса (момент количества движения, угловой момент) \vec{L} . В системе координат с центром в точке "О" величина $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m \cdot \vec{v}$ определяет вектор момента импульса материальной точки m , положение которой задано радиусом - вектором \vec{r} .

Если тело представляет собой дискретную совокупность N точек, то вектор $\vec{L} = \sum_{i=1}^N \vec{L}_i$ представляет собой момент импульса тела относительно точки "О". В некоторый момент времени вращательное движение тела характеризуется вектором угловой скорости $\vec{\omega}$. В отличие от поступательного движения связь векторов \vec{L} и $\vec{\omega}$ в общем случае оказывается достаточно сложной.

Совместим одну из осей, например, ось Z системы координат, закреплённой на теле, с вектором угловой скорости $\vec{\omega}$. Если не принимать специальных мер в виде внешнего воздействия на ось вращения, то добиться неподвижного положения оси вращения в пространстве в общем случае не удаётся. На практике мы встречаемся с такой ситуацией, наблюдая, например, "скачку" стиральной машины по полу в режиме отжима при неравномерном распределении белья по объёму бака, или испытывая дискомфорт при движении транспортного средства с несбалансированными колёсами, и в других подобных случаях.

Однако возможны случаи вращения тела относительно оси, положение которой остаётся неизменным и без внешнего воздействия. Такая ось называется *свободной*. Опыт показывает, что любое твёрдое тело имеет три взаимно-перпендикулярные свободные оси, проходящие через центр инерции тела. Эти свободные оси называют ещё *главными осями инерции*. Для тела, форма которого и распределение плотности симметричны относительно некоторой оси, данная ось является главной осью инерции.

Если ось вращения не является главной осью инерции, то для сохранения её положения в пространстве используют устройства, называемые подшипниками. Они и создают то внешнее воздействие, которое делает ось вращения неподвижной.

Для твердого тела (его форма не изменяется во время вращения) с неподвижной осью вращения (пусть это будет ось Z) величина проекции вектора \vec{L} на ось Z определяется выражением [1,2]

$$L_z = \sum_{i=1}^N m_i \cdot r_i^2 \cdot \omega_z = I_Z \cdot \omega_Z \quad (1)$$

Здесь m_i, r_i - соответственно масса и расстояние до оси вращения точек тела с номером i , ω_z - угловая скорость вращения тела вокруг оси Z .

Величина $m_i \cdot r_i^2$ называется моментом инерции материальной точки относительно оси вращения, а $I = \sum_{i=1}^N m_i \cdot r_i^2$ - момент инерции тела, относительно оси вращения.

Практически мы встречаемся с непрерывным распределением вещества тела по его объему V , поэтому моментом инерции тела относительно произвольной оси Z называют величину

$$I_z = \int_V dm \cdot r^2 = \int_V \rho \cdot r^2 \cdot dV, \quad (2)$$

Здесь ρ – плотность вещества тела, которая может быть функцией координат.

Уравнение динамики вращательного движения для системы материальных точек $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{внеш}$ в проекции на ось Z можно записать в виде $\frac{d(I_z \cdot \omega_z)}{dt} = M_z^{внеш}$ и, учитывая, что $I_z = const$, получить

$$I_z \cdot \varepsilon = M_z, \quad (3)$$

где ε - угловое ускорение вращающегося тела, а M_z - суммарный момент сил, приложенных к телу, в проекции на ось вращения.

Уравнение (3) динамики вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси вращения аналогично уравнению динамики поступательного движения тела постоянной массы $m\vec{a} = \vec{F}$.

В уравнении (3) величина I_z определяет инертные свойства тела во вращательном движении и зависит не только от величины массы тела, но и от распределения этой массы относительно оси вращения. Например, стержень массой m и тонкий диск такой же массы при приложении к этим телам одинакового момента сил будут менять свою угловую скорость по разному (рис.1).

Расчет момента инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс по формуле (2) выполняется достаточно легко для симметричных тел простой формы (стержень, диск, обруч, кольцо, шар). Как и масса, момент инерции является аддитивной величиной, т.е. момент инерции системы тел равен сумме моментов инерции отдельных тел относительно общей оси. Это позволяет в случае сложной формы тела, "разбить" его на простые тела, моменты инерции которых относительно оси тела известны. Если же ось симметрии отдельной части тела не совпадает с осью симметрии всего тела, но параллельна ей, то можно воспользоваться теоремой Штейнера-Гюйгенса, согласно которой, момент инерции тела относительно произвольной оси равен сумме момента инерции этого тела относительно оси, проходящей через центр масс, и произведения массы тела на квадрат расстояния между осями, которые должны быть параллельными.

В качестве ответа на контрольный вопрос № 3 – предлагается получить выражение $I_z = \frac{1}{4}mR^2$ для момента инерции тонкого диска массой m и радиусом R относительно оси Z , проходящей через центр диска и лежащей в плоскости диска.

Учитывая теорему Штейнера - Гюйгенса и указанное выражение для момента инерции тонкого диска, можно рассчитывать момент инерции прямого кругового цилиндра массой m , радиусом R и высотой H относительно оси, проходящей через центр массы цилиндра и параллельной плоскостям оснований: (рис 2)

$$I_z = \frac{m}{12}(3R^2 + H^2) \quad (4)$$

Это соотношение будет использовано в расчетах в экспериментальной части работы.

Определение момента инерции тела по формуле (2) представляет собой аналитический способ нахождения этой важной динамической характеристики тела во вращательном движении. При возникновении значительных вычислительных сложностей в расчете по формуле (2) можно применять динамический способ оценки момента инерции, основанный на уравнении динамики (3) или соотношении, связывающем кинетическую энергию тела и его угловую скорость.

Использование динамического способа требует знания величины момента сил и углового ускорения. Экспериментальное определение этих величин иногда требует достаточно сложного оборудования. Однако возможен достаточно простой способ определения момента инерции тела, который мы рассмотрим на примере вращательно-колебательного движения, возникающего при действии на исследуемое тело возвращающего момента пружины, работающей по закону Гука

При повороте тела с моментом инерции I_Z вокруг оси Z на угол φ прикрепленная к телу спиральная пружина деформируется и в ней возникает упругий момент $M_{\text{упр}} = D\varphi$, пропорциональный углу закручивания. Если пренебречь потерями на трение, то уравнение динамики вращения тела вокруг оси Z будет иметь вид:

$$\begin{aligned} I \cdot \ddot{\varphi} &= -M_{\text{упр}} = -D \cdot \varphi \\ \ddot{\varphi} + \frac{D}{I} \cdot \varphi &= 0 \text{ или} \\ \ddot{\varphi} + \omega_0^2 \cdot \varphi &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

В (5) коэффициент упругости пружины D должен быть известен, а, определяя период свободных колебаний системы $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}}$, можно найти момент инерции тела. Необходимо отметить, что в найденное значение I войдут инертные свойства оси установки и пружины. При необходимости они могут быть рассчитаны и учтены при оценке момента инерции собственно тела. В предлагаемой лабораторной работе используется динамический метод, а его точность оценивается сравнением с аналитическим способом расчета момента инерции тела простой формы. В работе предлагаются экспериментально проверить справедливость теоремы Штейнера-Гюйгенса.

Экспериментальная часть

На рис.4 изображены принадлежности, используемые при выполнении лабораторной работы. Это массивное трехопорное основание с вертикальной осью вращения, установленной в подшипниках и связанной с опорой через ленточную спиральную пружину, создающую возвращающий момент при движении исследуемых объектов. В набор принадлежностей входит так называемый "световой барьер", представляющий собой П-образную конструкцию с размещенной внутри электронной схемой и элементами управления снаружи. Зазор между выступами устройства пересекает узкий пучок инфракрасного излучения, при перекрытии которого движущимся непрозрачным объектом, электронная схема получает входной сигнал. Длительность сигнала определяется временем перекрытия луча, диаметр которого около 1мм. Нужно иметь ввиду, что чувствительность электронной схемы такова, что объект толщиной 0,3мм, пересекающий световой луч, может вызвать срабатывание схемы.

Устройство "световой барьер", которое в дальнейшем для краткости будем называть счетчиком, может работать в одном из четырех режимов, которые выбираются движковым переключателем. Индикация выбранного 2, 3 или 4 режима после нажатия кнопки "Set" (обнуление, сброс) осуществляется высвечиванием двух, трех или четырех точек в нижней части светодиодного дисплея. При работе в первом режиме (счет числа импульсов) после нажатия кнопки "Set" на дисплее высвечиваются 4 нуля.

В настоящей лабораторной работе используется четвертый режим работы счетчика, обозначенный на переключателе символом ω что означает измерение периода колебаний. Счетчик может измерять периоды в интервале $(0 \div 9,999)$ с.

Счетчик с помощью стержня-стойки закрепляется на круглой опоре так, чтобы непрозрачный флажок (прерыватель луча) при колебаниях закрепленных на вращающейся оси тел пересекал луч светового барьера. В качестве прерывателя можно использовать лепесток из бумаги или алюминиевой фольги, прикрепленный липкой лентой к исследуемому телу. При работе с объектом в виде стержня с двумя цилиндрами прерыватель не нужен. Для определения коэффициента D упругости спиральной пружины служит пружинный динамометр.

В качестве объектов для исследования предлагаются:

1. сплошной цилиндр
2. диск
3. тело сферической формы
4. пустотелый цилиндр с ребрением внутри
5. стержень с цилиндрическими грузиками.

Выполнение эксперимента.

1. Собрать счетчик, ввернув в корпус стержень-стойку и закрепив её на опоре.
2. Подключить к счетчику сетевой адаптер и, вставив вилку адаптера в розетку с напряжением 220В, убедиться, что счетчик работает.

Примечание. Указанные подготовительные операции могут выполнены инженером-лаборантом до начала работы студентов.

ЗАДАНИЕ №1

Определение коэффициента D упругости пружины

Закрепить на вращающейся оси пластиковый диск, по периферии которого на взаимно-перпендикулярных диаметрах сделаны сверления диаметром $\approx 1,0$ мм. С помощью штифта с утолщением в местах сверления будет расположен конец пружины динамометра с кольцом. Последовательно поворачивая диск на углы $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{4}$, π , ... при закрепленной трехопорной стойке снять показания динамометра, расположенного касательно к окружности диска. Измерив плечо силы натяжения пружины динамометра, рассчитать моменты сил упругости для соответствующих углов φ закручивания пружины.

С использованием миллиметровой бумаги построить график $M_{\text{упр}} = f(\varphi)$; по полученным измерениям на графике подобрать прямую линию, наиболее близко проходящую около отмеченных точек и определить

$$D = \frac{M_{\text{упр}}}{\varphi} \quad (6)$$

Сравнить полученную величину со значением D, указанным в характеристиках установки $\left(D = 0,0265 \frac{\text{Нм}}{\text{рад}} \right)$

ЗАДАНИЕ 2

Определение момента инерции подвижной оси (включая элементы крепления объектов и пружину)

Вставить в отверстие держателя объектов Г-образный прерыватель светового луча, убедиться в том, что прерыватель пересекает луч при своем движении, а в состоянии покоя закрывает луч. Включить адаптер счетчика в сеть, выставить режим измерения периода колебания. Отведя прерыватель примерно на 20° от положения равновесия, нажать кнопку "Set" и отпустить прерыватель. Ось с держателем и прерывателем придет в колебательное движение с достаточно высокой частотой, однако длительность периода будет замерена. Сделав аналогичные измерения 3÷5 раз, вычислим среднее значение периода колебаний оси.

Из формулы $(T = 2\pi \sqrt{\frac{I_z}{D}})$ получим выражение для момента инерции системы ось-держатель-пружина относительно оси вращения Z. В дальнейших обозначениях момента инерции индекс z будет опущен.

$$I_{oc} = \frac{T^2}{4\pi^2} D$$

Эта величина будет присутствовать в каждом измерении моментов инерции исследуемых тел и представлять собой главную составляющую систематической ошибки измерений.

ЗАДАНИЕ 3

Определение момента инерции сплошного цилиндра.

Закрепив в держателе сплошной цилиндр, убедиться, что при его колебаниях закрепленный на нижнем торце флажок-прерыватель пересекает световой луч .

Отклонив на угол примерно $\frac{\pi}{6}$ от положения равновесия цилиндр, сбросив показания счётчика, отпустить цилиндр и зафиксировать показания счётчика после первого периода колебания. Сбросив через $(1 \div 2)c$ показания счётчика, убедиться, что новое значение периода колебания практически не отличается от первого.

По формуле $I_{cy} = \frac{T_{cy}^2}{4\pi^2} \cdot D$ рассчитать момент инерции сплошного цилиндра относительно центральной оси, параллельной образующей цилиндра.

Масса сплошного цилиндра m_{cy} указана на конкретном образце, а его радиус $R_{cy} = 0,0495 м$, таким образом, момент инерции $I_{cy}^* = \frac{1}{2} m_{cy} R_{cy}^2$

Сравнивая значения I_{cy} и I_{cy}^* , сделать соответствующие выводы.

ЗАДАНИЕ 4

Определение момента инерции диска

Провести аналогичные измерения для диска, масса которого m_d указана на конкретном образце, а радиус $R_g = 0,108 м$, и сравнить I_d и I_d^* .

ЗАДАНИЕ 5

Определение момента инерции сферического тела

Закрепить на поверхности сферы флажок-прерыватель и, замерив период колебаний, рассчитать $I_{сф} = \frac{T_{сф}^2}{4\pi^2} D$. Полагая шар однородным по плотности, вычислим $I_{сф} = 0,4 m_{сф} R_{сф}^2$, если $R_{сф} = 0,070 м$, а $m_{сф}$ обозначена на шаре.

Сравнить $I_{сф}$ и $I_{сф}^*$.

ЗАДАНИЕ 6

Определение момента инерции пустотелого цилиндра.

Внешний вид тела позволяет заключить, что аналитический метод вычисления момента инерции достаточно сложен. Поэтому нахождение момента инерции цилиндрического тела проведём, осуществив измерение периода его колебаний при закреплении на вращающейся оси. Измерив время одного колебания как среднее из 3 опытов, по формуле $I_{mц} = \frac{T_{mц}^2}{4\pi^2} \cdot D$ найдём величину момента инерции.

ЗАДАНИЕ 7

Проверка теоремы Штейнера-Гюйгенса.

Эксперимент выполняется с телом в виде тонкого стержня длиной $l = 0,6 м$ и массой $m_{cm} = 0,126 кг$, на котором симметрично относительно оси вращения

закрепляются 2 цилиндрических грузика, сначала на расстояниях $a_1=5$ см от оси, а затем на расстояниях $a_2=10$ см от оси. Здесь a_1 и a_2 – расстояние между осью вращения стержня и центром тяжести каждого грузика (рис. 4).

При первом закреплении грузиков определяем момент инерции тела по формуле $I_1 = \frac{m_{cm} l^2}{12} + 2 \left[\frac{m}{12} (3R^2 + H^2) + m a_1^2 \right]$, а затем, измеряя период колебаний, вычисляем $I_1^1 = \frac{T^2}{4\pi^2} D$. Результаты должны практически совпадать.

Момент инерции, полученный экспериментально при закреплении грузиков на расстояниях a_2 , должен превышать I_1^1 на величину $2m(a_2^2 - a_1^2)$.

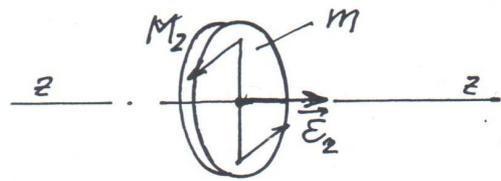
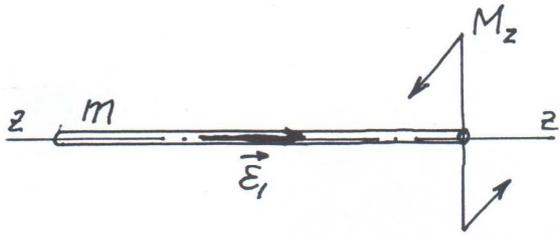
Принять $R = 15$ мм, $H = 40$ мм, $m = 0,226$ кг.

Контрольные вопросы

1. Дать определение векторов момента силы и момента импульса материальной точки.
2. Сформулировать физический смысл момента инерции твёрдого тела. Привести пример тела, момент инерции которого меняется в процессе движения.
3. Получить формулу для расчёта момента инерции прямого кругового цилиндра массой m и размерами R и H (рис. 2).
4. Можно ли на предлагаемой установке измерить момент инерции несимметричного тела.

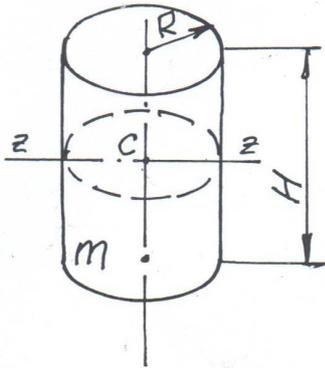
Литература

1. Афонин А.М.. Физические основы механики. Изд. МГТУ им. Н.Э. Баумана. М., 2006 г.
2. Савельев И.В.. Курс общей физики, том I. Изд. Наука. М., 1970 г.

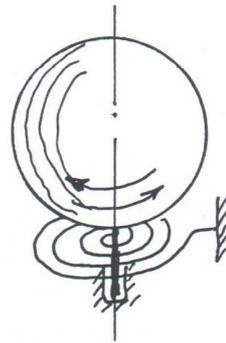


$$E_1 > E_2$$

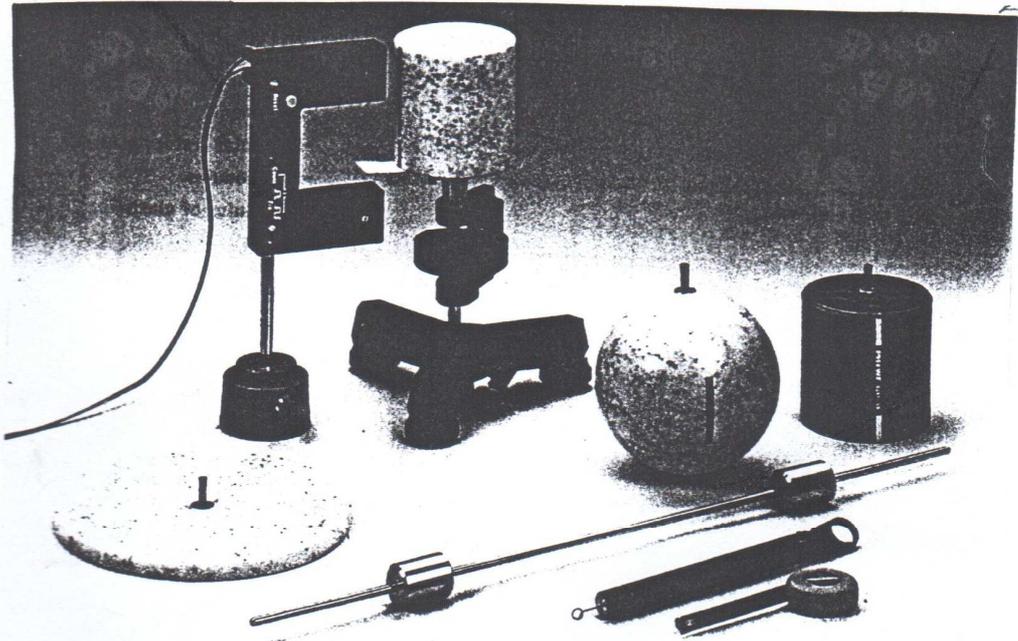
Puc.1



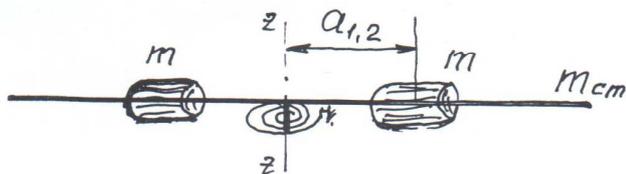
Puc.2



Puc.3



Puc.4



Puc.5