Олимпиада по физике МГТУ им. Н.Э.Баумана 2022

Задача 1. Тело постоянной массы m начинает движение по закону $s = \alpha t^{\frac{3}{2}}$. Определить какая физическая величина остается постоянной после начала движения и найти ее значение.

Задача 2. На гладком горизонтальном столе лежат n одинаковых шаров, образующих правильный многоугольник. Дополнительному $(n + 1)$ такому же шару сообщают начальную скорость v и пускают его вдоль одной из сторон многоугольника так, чтобы он испытал соударения со всеми шарами, после чего двигался бы по прямой, являющейся продолжением первоначальной траектории. Какое количество шаров n находилось на столе, если после всех столкновений скорость $n + 1$ шара уменьшилась в 16 раз. Все удары абсолютно упругие, шары свободно катятся без трения по поверхности стола.

Задача 3. Обруч, с радиусом R, немного согнули, превратив в эллипс с полуосями a и b, причем $a - b \ll R$. Определите скорость при которой обруч начнет подпрыгивать при движении по горизонтальной поверхности.

Задача 4. В герметичном вертикально расположенном цилиндре находится поршень, который делит газ на две одинаковые по массе части. Отношение объемов верхней и нижней частей при температуре T_0 равно γ_0. Как измениться отношение объемов, если увеличить температуру до значения T. Трением поршня о стенки цилиндра пренебречь.

Задача 5. В центре цилиндра длины l и диаметра d, $(l \gg d)$ находится отрицательный заряд $-q$ с малой массой m, способный двигаться вдоль его оси. Определите частоту малых колебаний заряда, если по боковой поверхности равномерно распределен положительный заряд с поверхностной плотностью σ.

Задача 6. Вокруг прямого проводника с током I вдоль силовой линии магнитного поля радиуса r движется магнитный диполь с дипольным моментом p_m со скоростью v. Определить массу диполя.

Решение задач

Задача 1. Рассмотрим как меняется мощность при таком законе движения.

$$N = Fv = m\frac{dv}{dt}v,\ mvdv = Ndt,\ mdv^2 = 2Ndt,\ v = \sqrt{\frac{2Nt}{m}} = \frac{ds}{dt},\ ds = \sqrt{\frac{2Nt}{m}}dt.$$

$s = \dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{2N}{m}}t^{\frac{3}{2}}$, тогда: $\alpha = \dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{2N}{m}}$ и $N = \dfrac{9}{8}m\alpha^2$.

Ответ: $N = \frac{9}{8}m\alpha^2$.

Задача 2. Применяя к анализу упругого столкновения $n+1$ и первого шаров законы сохранения импульса и механической энергии приходим к выводу, что их скорости после удара взаимно перпендикулярны, причем скорость $n+1$ шара станет равной $v_1 = v\cos(\phi)$, где ϕ - внешний угол многоугольника. После n столкновений $v_{n+1} = v\cos(\phi)^n$, тогда, принимая во внимание, что $\frac{2\pi}{n} = \phi$, получаем

$$\frac{v}{16} = v\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)^n,\ \frac{1}{2^{\frac{4}{n}}} = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right),\ \text{перебором целых чисел получим } n = 8.$$

Ответ: $n = 8$.

Задача 3. По условию эллиптический обруч мало отличается от круглого, поэтому можно пренебречь неравномерностью вращения обруча и считать, что при движении его скорость $v \approx \omega R$. Зависимость вертикальной координаты y центра масс обруча от времени имеет вид $y = \frac{\delta}{2}\cos(2\omega t)$, где $\delta = a - b$. Здесь учтено, что за один оборот обруча y дважды проходит через максимум, и начало отсчёта координаты помещено на высоте R над дорогой. Обруч начнёт подпрыгивать тогда, когда при движении максимальная величина проекции ускорения его центра масс на вертикаль превысит ускорение свободного падения. Проекция ускорения

$$a_y = y'' = -2\delta\omega^2\cos(2\omega t),\ |(a_y)_{max}| = 2\delta\omega^2 > g,\ \text{откуда, } \omega > \sqrt{\frac{g}{2\delta}},\ v > R\sqrt{\frac{g}{2\delta}}.$$

Ответ: $v > R\sqrt{\frac{g}{2\delta}}$.

Задача 4. В равновесии действующая на поршень сила тяжести уравновешивается силами давления газа сверху и снизу. Поэтому разность давлений газа в нижней и верхней частях цилиндра имеет одно и то же значение при любой температуре. Обозначим давление газа над и под поршнем при температуре T_0 через p_{10} и p_{20}, а при температуре T через p_1 и p_2. Тогда $p_{20} - p_{10} = p_2 - p_1$. В любом положении поршня полный объем цилиндра имеет одно и то же значение $V_{20} + V_{10} = V_2 + V_1$. Уравнения состояния газа по обе стороны поршня: $p_{10}V_{10} = p_{20}V_{20}$ и $p_1V_1 = p_2V_2$. Откуда $\frac{p_{20}}{p_{10}} = \gamma_0$ и $\frac{p_2}{p_1} = \gamma$. Запишем условия на разность давлений и объем через величины γ_0, γ и параметры газа в верхней части:

$$p_{10}(\gamma_0 - 1) = p_1(\gamma - 1),\ V_{10}(\frac{1}{\gamma_0} + 1) = V_1(\frac{1}{\gamma} + 1).$$

Перемножив данные уравнения получаем: $p_{10}V_{10}(\gamma_0 - 1)(\dfrac{1}{\gamma_0} + 1) = p_1V_1(\gamma - 1)(\dfrac{1}{\gamma} + 1)$.

Произведения давления газа на объем выражается через температуру: $\dfrac{p_{10}V_{10}}{T_0} = \dfrac{p_1 V_1}{T}$.

Поэтому получаем: $\dfrac{T_0}{T}\dfrac{\gamma_0^2 - 1}{\gamma_0} = \dfrac{\gamma^2 - 1}{\gamma}$.

Решая квадратное уравнение, получаем: $\gamma = \dfrac{T_0}{T}\dfrac{\gamma_0^2 - 1}{\gamma_0} + \sqrt{\left(\dfrac{T_0}{T}\dfrac{\gamma_0^2 - 1}{\gamma_0}\right)^2 + 1}$.

Ответ: $\gamma = \frac{T_0}{T}\frac{\gamma_0^2-1}{\gamma_0} + \sqrt{\left(\frac{T_0}{T}\frac{\gamma_0^2-1}{\gamma_0}\right)^2 + 1}$.

Задача 5. При смещении заряда на некоторое расстояние x на конце цилиндра образуется нескомпенсированный заряд на отрезке длиной $2x$. Этот заряд можно считать точечным, так что сила притяжения дается соотношением $f = \frac{2x\pi d\sigma q}{4\pi\epsilon_0\left(\frac{l}{2}\right)^2}$. Таким образом, сила представляется в виде $f = kx$, где $k = \frac{2d\sigma q}{\epsilon_0 l^2}$. Тогда $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2d\sigma q}{m\epsilon_0 l^2}}$.

Ответ: $\omega = \sqrt{\frac{2d\sigma q}{m\epsilon_0 l^2}}$.

Задача 6.

Магнитное поле равно $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$

Пусть дипольный момент рамки с током I_0 со стороной $a \ll r - p_m = I_0 a^2$.

Сила, действующая на рамку $F = I_0 a \Delta B = I_0 a \dfrac{dB}{dr} a = p_m \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r^2} = \dfrac{mv^2}{r}$, $m = \dfrac{p_m I \mu_0}{2\pi r v^2}$.

Ответ: $m = \frac{p_m I \mu_0}{2\pi r v^2}$.