Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

Гладков Н.А., Вишнякова С.М., Вишняков В.И.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ МАЯТНИКА МАКСВЕЛЛА

Методические указания к лабораторной работе М103

по общему курсу физики

Москва, 2014

Цель работы.

1. Изучение динамики сложного движения твердого тела на примере маятника Максвелла, который одновременно находится во вращательном движении и совершает поступательное перемещение.
2. Определение момента инерции маятника Максвелла относительно своей оси симметрии.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ.

Уравнения движений маятника Максвелла.

Маятник Максвелла (рис.1 и 2а) состоит из массивного колеса 1 радиусом R с тонким осевым валом 2 радиусом r , которое висит на двух нитях 3. После намотки нитей центр колеса поднимется на некоторую высоту *h*. Если после этого колесо отпустить, то оно под действием силы тяжести маятника начнет раскручиваться и опускаться вниз. Очевидно, в крайнем нижнем положении маятника, когда все нити размотаются, скорость спуска маятника достигнет максимального значения V_{0max}. При этом ось маятника начнет вращаться вокруг оси маятника, проходящей через концы нитей. В результате скорость V_{0max} станет направленной вертикально вверх, т.е. вектор V_{0max} повернется на 180^0 . В дальнейшем нити начнут наматываться на осевой вал и маятник начнет подниматься вертикально вверх. Дойдя до крайнего верхнего положения, маятник начнет вновь опускаться. Таким образом, движения маятника станут повторяться, т.е. маятник Максвелла будет совершать колебательные движения. В отличие от известных нам маятников, которые колеблются по гармоническому закону, маятник Максвелла совершает свободные колебательные движения под действием постоянной по величине и по направлению результирующей силы, т.е. движется с постоянным ускорением (см. ниже), но значения скорости и смещения от положения равновесия повторяются. Отметим, что движение маятника – плоское.

Сложное движение можно разложить на поступательное и вращательное движения по-разному. Мы рассмотрим два варианта.

Первый вариант. Представим *сложное движение маятника как сумму поступательного движения* в лабораторной (абсолютной) системе отсчета *и вращательного движения* относительно его оси симметрии, проходящей через центр масс маятника - точку О. Согласно основным законам динамики поступательного и вращательного движений твердого тела, пренебрегая толщиной нитей, можно написать уравнения движения маятника при его спуске (см. рис. 2а ,2б)

$$ma_0 = mg - 2F, \qquad (1)$$

$$I_0 \ \varepsilon_0 = 2Fr, \qquad (2)$$

где m – масса маятника; F- сила натяжения каждой нити, a_0 - ускорение центра масс маятника при его спуске, , I_0 - момент инерции маятника относительно его оси симметрии, проходящей через его центр масс, ε_0 - угловое ускорение маятника вокруг его оси, r_A -радиус осевого вала.

Считаем нить нерастяжимой, тогда скорость центра масс V_0 маятника будет равна скорости вращательного движения точек на поверхности осевого вала:

$$V_0 = V_{вр}(r) = \omega_0 r \quad , \qquad (3)$$

где ω_0 - угловая скорость вращения маятника относительно его оси, т.е. оси проходящей через точку О.

Если продифференцировать (3) по времени t, то приходим к соотношению следующего вида:

$$a_0 = \varepsilon_0 r \qquad (4)$$

где $a_0 = \frac{dv_0}{dt}$, $\varepsilon_0 = \frac{d\omega_0}{dt}$

Соотношение (4) связывает характеристику поступательного движения – ускорение центра масс a_0 - с характеристикой вращательного движения – угловым ускорением ε_0. Решая совместно уравнения (1), (2) и (4), для момента инерции маятника Максвелла относительно его оси симметрии (относительно оси, проходящей через центр масс) получим формулу

$$I_0 = mr^2\left(\frac{g}{a_0} - 1\right) \qquad (5).$$

Второй вариант.

Т.к. скорость центра масс $\vec{v}_0$ и скорость вращательного движения $\vec{v}_{вр}(r_{\mathrm{A}})$ точки А (см. рис.2б) вокруг оси О направлены в противоположные стороны, а в силу условия (3) равны по величине, то абсолютная скорость $\vec{v}_{\mathrm{A}}$ точки А оказывается равной нулю

$$\vec{v}_{\mathrm{A}} = \vec{v}_0 + \vec{v}_{\mathrm{вр}}(r_{\mathrm{A}}) = \vec{v}_0 + [\vec{\omega}_{\mathrm{o}}\vec{r}_{\mathrm{A}}] = 0 .$$

Через точку А параллельно оси симметрии маятника можно провести новую ось, ось А, скорость которой в каждый рассматриваемый момент времени равна нулю, так называемую мгновенную ось. Тогда движение маятника можно рассматривать только как его вращение в данный момент времени относительно мгновенной оси вращения, проходящей через точку А перпендикулярно плоскости рисунка, параллельно оси маятника. В этом случае уравнение динамики вращательного движения маятника запишется так:

$$I_A \, \varepsilon_A = mgr_A \qquad (6)$$

где ε_A-угловое ускорение маятника относительно мгновенной оси, проходящей через точку А, I_A - момент инерции маятника относительно оси, проходящей через эту точку А. Согласно теореме Штейнера:

$$I_A = I_0 + mr^2 \qquad (7)$$

Чтобы выйти на ту же формулу (5) для момента инерции маятника Максвелла I_0, надо связать угловое ускорение ε_A с ускорением центра масс a_0. При рассмотрении вращения маятника вокруг мгновенной оси А *скорость центра масс* V_0 *является скоростью вращения точек, лежащих на оси О*, и соответственно равна

$$V_0 = V_{вр}(r) = \omega_A\, r \qquad (8)$$

Если продифференцировать (8) по времени t, то получим:

$$a_0 = \varepsilon_A\, r. \qquad (9)$$

Решая совместно уравнения (6), (7) и (9), получим для определения момента инерции маятника такую же формулу, что и (5).

Так как силы, действующие на маятник – сила тяжести и силы натяжения, и моменты этих сил, не зависят от времени ни по величине, ни по направлению, то и поступательное, и вращательное движения будут равнопеременными, т.е. $a_0 = const$ и $\varepsilon_A = const$.

При равнопеременном движении с начальной скоростью, равной нулю, ускорение центра масс a_0 можно определить через высоту спуска h и время спуска t_h : из $h = a_0\, t_h^2 /2$ следует

$$a_0 = 2h/t_h^2 \qquad (10)$$

Подставляя (10) в (5), получим расчетную формулу для момента инерции маятника Максвелла относительно его оси симметрии:

$$I_0 = mr^2\left(\frac{gt_h^2}{2h} - 1\right) \qquad (11)$$

Итак, момент инерции маятника Максвелла можно определить, если измерить расстояние *h* и время прохождения маятником этого расстояния t_h.

Формулу (5) можно получить также и ***третьим способом:*** из уравнения, соответствующего *закону сохранения энергии:*

$$mgh = \frac{mv_0^2}{2} + \frac{I_0\omega_0^2}{2} \qquad (12)$$

где mgh –потенциальная энергия маятника в начальный момент времени, т.е. на высоте *h*, $\frac{mv_0^2}{2}$ - кинетическая энергия поступательного движения маятника и $\frac{I_0\omega_0^2}{2}$ - кинетическая энергия вращательного движения маятника относительно его оси О в конце спуска при $t = t_h$. При этом надо учесть, что согласно (3) скорость центра масс $V_0 = \omega_0 r$, а $V_0^2 = 2a_0 h$.

Теперь рассмотрим особенности силы натяжения, действующей на маятник со стороны нитей. Из уравнения (1) находим: $F=m/2\ (g-a_0)$. Эта сила определяет величину силы натяжения каждой нити, как при спуске, так и при подъеме маятника.

Однако когда маятник оказывается в крайнем нижнем положении, скорость его спуска достигает максимальной величины V_{0max}. Далее маятник начнет подниматься вверх также со скоростью V_{0max}, но направленной вверх.

Изменение направления скорости V_{0max} на 180^0 происходит за очень малый интервал времени Δt. Поэтому при прохождении маятником нижнего положения натяжение нитей резко возрастает (возникает рывок нитей). Величину силы натяжения F_{max} каждой нити при рывке можно найти из закона изменения импульса маятника

$$(2F_{max} - mg)\,\Delta t = mV_{0max} - (-mV_{0max}) = 2mV_{0max} \qquad (13)$$

Полагая, что при изменении направления скорости V_{0max} на 180^0 ее модуль не изменяется, получаем $V_{0max} = \pi r/\Delta t$, откуда

$$\Delta t = \pi r/V_{0max} \qquad (14)$$

Подставляя (14) в (13) находим:

$$2F_{max} = 2mV^2_{0max}/\pi r + mg \qquad (15)$$

Так как $V^2_{0max} = 2a_0 h$, то максимальная сила натяжения нитей будет больше силы тяжести маятника, она зависит от высоты падения и равна:

$$Fmax = \frac{1}{2}\left(\frac{4h}{\pi r} m a_0 + mg\right) \qquad (16)$$

Поэтому прочность нитей должна быть такой, чтобы при рывке каждая из них выдерживала максимальное натяжение F_{max}, определяемое формулой (16).

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

Описание установки. Общий вид экспериментальной установки представлен на рис.1. Маятник Максвелла, висящий на двух нитях 3, расположен между двумя стойками. Свободные концы нитей прикреплены к горизонтальной перекладине 4. При этом одна нить прикреплена к регулировочному винту. Используя этот винт, можно установить ось колеса точно в горизонтальном положении. При вращении колеса вокруг его оси нити 3 равномерно наматываются на осевой вал 2 так, как это показано на рис.2а. При этом плотность витков должна быть приблизительно одинаковой на обоих концах вала. До начала движения нити всегда должны быть намотаны в одном и том же направлении.

После намотки нитей центр колеса поднимется на некоторую высоту h. Если после этого колесо отпустить, то оно под действием силы тяжести маятника и сил натяжения начнет раскручиваться и опускаться вниз.

На третьей стойке закреплено спусковое устройство: игла, спусковой тросик, электросистема, связывающая с помощью двух соединительных проводов спусковое устройство и счетчик времени. Игла вставляется в одно их углублений на ободе колеса, и с помощью тросика удерживает колесо от движения, либо освобождает его. Положение кнопки тросика можно фиксировать стопорным винтиком или пальцем руки (как в фотоаппарате). Спусковое устройство должно быть отрегулировано так, чтобы после старта колесо не колебалось и не крутилось.

На четвертой стойке установлен вилкообразный световой барьер со счетчиком. На верхней панели светового барьера расположены дисплей для вывода результатов отсчета, кнопка «Set» (сброс), рычажок для установления режимов отсчета (число пересечений светового луча барьера, промежутков времени).

Методика выполнения эксперимента

Алгоритм проведения эксперимента сводится к следующим операциям:

1. Измеряется время спуска маятника с разных высот, начиная с высоты h=0,50м до высоты h=1,00м с интервалом Δh=0,10м. Для каждой высоты время спуска определяется три раза: t_1, t_2, t_3. Затем находится среднее время спуска с данной высоты.
2. Эти данные заносятся в таблицу. При вычислениях ускорение свободного падения брать равным g=9,8 м/с^2.

   Таблица

h, м	t_i. *с*	$t_h = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} t_i$, с	${t_h}^2$, *с*^{2}	$\frac{1}{2} g {t_h}^2$, *м*
0,50	t_1= t_2= t_3=			
0,60				

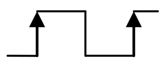
……..				
1,00				

Задание высоты спуска и измерение времени движения маятника Максвелла может проводиться в двух вариантах.

Вариант А.

1. На вертикальной шкале устанавливается с помощью верхнего и нижнего реперов высота h.
2. Наматывая нити на осевой вал, поднять маятник к верхней точке шкалы, на которую указывает верхний репер так, чтобы ось вала находилась на одном уровне с концом репера. Секундомер приводится в исходное рабочее состояние.
3. Отпустить маятник и одновременно включить секундомер.
4. При прохождении осью маятника нижнего репера закончить измерение времени спуска маятника (нажать «Стоп» секундомера).
5. Для данной высоты опыт повторить 3 раза, записав показания секундомера t_i в таблицу.
6. Определить среднее время спуска с данной высоты h по формуле $t_h = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} t_i$
7. Результаты опытов занести в таблицу.

Вариант Б

1. Подсоединить спусковое устройство к световому барьеру, как это показано на рис.4.
2. На панели светового барьера аккуратно установить рычажок переключения режимов отсчета в положение  (соответствует 3 огонькам на дисплее).
3. Нажать кнопку «Set» (*сброс*) светового барьера. Нажать кнопку «Set» еще раз: *подготовка к новому отсчету.*
4. Нажать кнопку тросика так, чтобы игла вошла в углубление на ободе колеса и удерживала его от движения. Зафиксировать положение кнопки с помощью стопорного винтика или удерживать пальцем (как в фотоаппарате для

длительной экспозиции). Ось колеса должна при этом сохранять горизонтальное положение.

5. Отпустить кнопку тросика. При этом колесо начнет движение и включится счетчик времени.
6. После того, как колесо пройдет иглу (чтобы не помешать движению колеса), кнопку тросика надо <u>опять нажать</u> и держать кнопку в нажатом состоянии до того момента, пока ось колеса не приблизится к световому лучу, и <u>отключить до пересечения луча</u>. Отсчет времени заканчивается при пересечении светового луча барьера. На дисплее высвечивается время движения маятника из состояния покоя (с начальной скоростью, равной нулю) до момента пересечения луча.

Отсчет времени начинается с момента отпускания кнопки тросика для начала движения колеса.

Счетчик останавливается, как только ось вращения пересекает путь луча света вилкообразного светового барьера.

Пояснение. В установленном режиме работы счетчика времени, счетчик включается при первом пересечении луча и выключается при третьем пересечении, т.е. показывает промежуток времени между первым и третьим прерыванием луча. В системе «спусковое устройство - световой барьер» первое отпускание кнопки тросика (начало движения колеса) имитирует первое пересечение луча, второе отпускание кнопки во время движения колеса имитирует второе пересечение луча, третье пересечение луча производится реально самим колесом.

7. Из описания работы системы «спусковое устройство - световой барьер» следует способ задания высоты спуска. *Высота h равна расстоянию от положения осевого вала в состоянии покоя до положения луча светового барьера.* Это расстояние можно изменять, перемещая либо спусковое устройство, меняя тем самым исходное положения маятника, либо перемещая световой барьер. Рекомендуется *перемещать световой барьер.*

Обработка результатов измерений.

Предлагается графический способ обработки результатов измерений.

Преобразуем формулу (11) к несколько иному виду:

$\frac{gt_h^2}{2} = \left(1 + \frac{I_0}{mr^2}\right) h$, откуда видно, что $\frac{gt_h^2}{2}$ и h связаны линейно, т.е. $\frac{gt_h^2}{2} = C\ h$, где C= $\left(1 + \frac{I_0}{mr^2}\right)$ - коэффициент пропорциональности.

Если на оси ординат y откладывать величину $\frac{gt_h^2}{2}$, а по оси абсцисс x - величину h , то $C = tg\alpha$, то есть угол α определяет угол наклона графика к оси h (рис.3). Итак,

$$tg\alpha = \left(1 + \frac{I_0}{mr^2}\right) \quad (17)$$

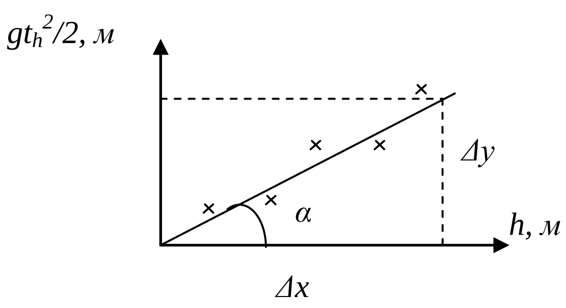


Рис.3

1. Результаты расчетов из таблицы нанести в виде точек на график в системе координат *x= h , y=gt²/2 .*
2. Провести прямую линию (см. рис.3), проходящую через начало координат так, чтобы число экспериментальных точек справа и слева от прямой было приблизительно одинаковым.
3. Вычислить $tg\alpha$ по формуле $tg\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. При этом для расчета этой величины надо брать наиболее удаленную от начала координат точку прямой.
4. Определить угол α по формуле $\propto = arc\ tg\, \frac{gt_h^2}{2h}$.
5. Момент инерции маятника Максвелла рассчитать, согласно (17) по формуле:

$$I_0 = mr^2(tg\alpha - 1), \quad (18)$$

где масса маятника Максвелла равна m=0,436кг, а радиус осевого вала равен r = 2,5*мм*.

Расчет погрешностей измерений.

Поскольку момент инерции маятника Максвелла I_0 зависит , согласно (18), от массы m, от радиуса вала r, а так же от α – угла наклона прямой на рис.3, то есть I_0 является функцией от этих величин:

$$I_0 = I_0(m, r, \propto)\,, \qquad (19)$$

То поэтому согласно общей зависимости для вычисления погрешности косвенного измерения и в соответствии с формулами (18), (19) приходим к формуле следующего вида:

$$\Delta\, I_0 = \sqrt{\left(\frac{\partial I_0}{\partial m}\Delta m\right)^2 + \left(\frac{\partial I_0}{\partial r}\Delta r\right)^2 + \left(\frac{\partial I_0}{\partial \propto}\Delta \propto\right)^2} \qquad (20)$$

Масса *m* и радиус осевого вала *r* маятника Максвелла, входящие в формулу (18), определяются с достаточно малой абсолютной погрешностью

$$m = (436\ \pm 1)\cdot 10^{-3}\ \text{кг}$$

$$r = (2{,}50\ \pm\ 0{,}01)\ \text{мм}.$$

Поэтому абсолютная погрешность определения ΔI_0 будет зависеть в основном от точности определения угла α (точнее от абсолютной погрешности угла α, т.е. от $\Delta\ \alpha$).

Считая, что первое и второе слагаемые под радикалом в формуле (20) являются величинами меньшего порядка по сравнению с величиной третьего слагаемого, то первым и вторым слагаемыми можно пренебречь. Следовательно, (20) в этом случае примет более простую форму записи:

$$I_0 = \frac{\partial I_0}{\partial \propto}\,\Delta \propto \qquad (21)$$

Далее, определяя производную в (21) в соответствии с зависимостью (18), находим формулу, позволяющую рассчитать абсолютную погрешность измерения момента инерции маятника Максвелла:

$$\Delta I_0 = \frac{mr^2}{cos^2\alpha}\,\Delta\alpha \qquad (22)$$

Абсолютная погрешность угла α, т.е. Δα, определяется по результатам эксперимента и в соответствии с рис.3. Итак,

$$\Delta\alpha = \alpha_{max} - \alpha\,, \qquad (23)$$

или

$$\Delta\alpha = \alpha - \alpha_{min}\,, \qquad (24)$$

где углы α_{max} и α_{min} соответствуют углам наклона прямых, проходящих через начало координат и проведённых через экспериментальные точки, которые определяют соответственно максимальный угол наклона прямой α_{max}, либо минимальный угол наклона прямой α_{min}. Эти углы рассчитываются по методике, которая ранее использовалась при определении угла α (см. стр. 9). В формулу (22) подставляется наибольшая из величин Δα, рассчитанных по формулам (23) и (24).

Окончательный результат определения момента инерции маятника Максвелла представить в виде:

$$I_0 \mp \Delta I_0.$$

Контрольные вопросы

1. Написать уравнение поступательного движения (уравнение движения центра масс) маятника Максвелла в абсолютной (лабораторной) системе отсчета и уравнение вращательного движения вокруг оси, совпадающей с осью симметрии маятника и проходящей через его центр масс.
2. Написать уравнение движения маятника Максвелла относительно мгновенного оси вращения, проходящей через точку А, параллельно оси симметрии маятника.
3. Написать закон сохранения энергии при движении маятника Максвелла.
4. Доказать, то при подъеме маятника Максвелла суммарное натяжение двух нитей такое же, как и при его спуске, т.е. меньше силы тяжести.

Список литературы

1. Савельев И.В. Курс общей физики. Кн.1. М.: Наука. 1998.
2. Иродов И.Е. Механика. Основные законы. М.- С.П.: 2000.
3. Сивухин Д.В. Общий курс физики. т.1. М.: Наука. 1979.
4. Савельева А.И., Фетисов И.Н. Обработка результатов измерений при проведении физического эксперимента. М.: МГТУ, 1999.

Рис.1

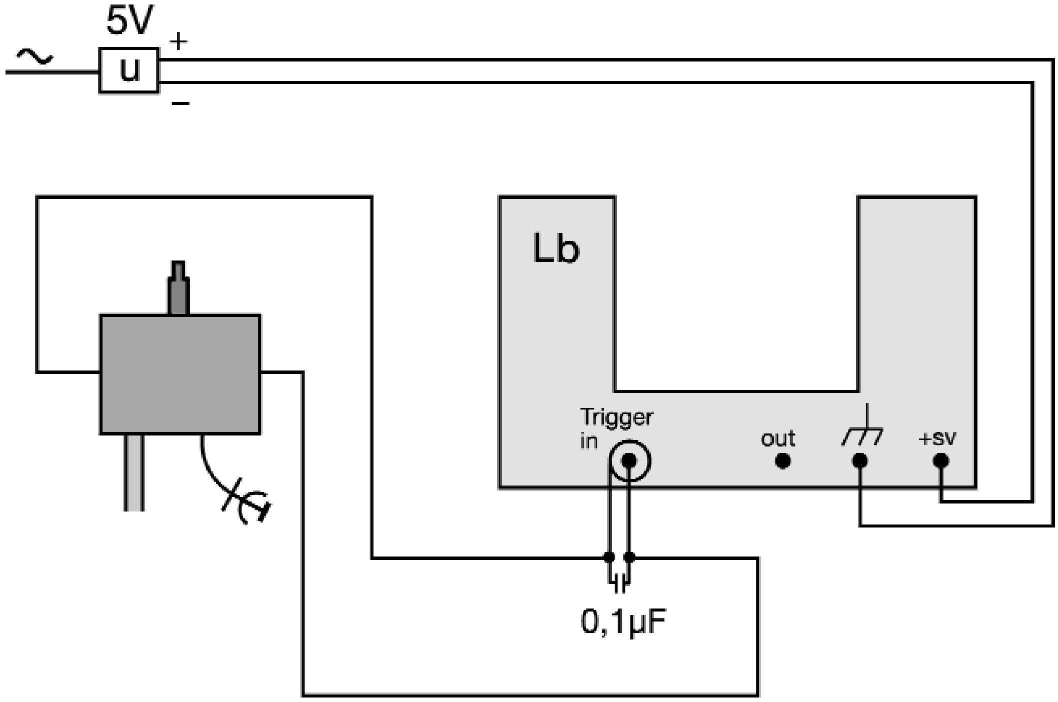


Рис.4