Московский государственный технический университет им.Н.Э. Баумана

Кафедра ФН-4

С.В. Башкин, А.В. Косогоров, Л.Л. Литвиненко, А.В. Семиколенов

ОБОРОТНЫЙ МАЯТНИК

Методические указания к лабораторной работе № М104
по курсу общей физики

Под редакцией *И.Н. Алиева*

М о с к в а

ОГЛАВЛЕНИЕ

Цель работы – определение ускорения свободного падения g по измерению периода колебаний оборотного маятника.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Динамика твёрдого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси

Моментом силы $\vec{F}$ **относительно неподвижной точки** O называют векторное произведение радиуса-вектора $\vec{r}$, проведённого из точки O в точку приложения силы $\vec{F}$**,** на саму эту силу:

$$\vec{M} = \left[\vec{r}, \vec{F}\right]. \tag{1}$$

Вектор $\vec{M}$ направлен перпендикулярно плоскости векторов $\vec{r}$ и $\vec{F}$ по правилу правого винта. Модуль момента силы

$$M = r \cdot F \cdot \sin\alpha = F \cdot l\,, \tag{2}$$

где α - угол между $\vec{r}$ и $\vec{F}$ **;**

l **-** плечо силы $\vec{F}$ длина перпендикуляра, опущенного из точки O на линию действия силы $\vec{F}$ **.**

Главным моментом внешних сил относительно неподвижной точки *O* называют вектор, равный векторной сумме моментов относительно точки O всех внешних сил, действующих на механическую систему:

$$\vec{M}^{ВНЕШ} = \sum_{i-1}^{n}\left[\vec{r}_i, \vec{F}_i^{ВНЕШ}\right]. \tag{3}$$

Моментом импульса $\vec{L}_i$ **материальной точки относительно неподвижной точки** O называют векторное произведение радиуса-вектора $\vec{r}_i$ материальной точки, проведённого из точки O, на импульс этой материальной точки $\vec{p}_i = m_i\vec{\upsilon}_i$:

$$\vec{L}_i = \left[\vec{r}_i, \vec{p}_i\right]. \tag{4}$$

Моментом импульса механической системы (твёрдого тела) относительно неподвижной точки *O* называют вектор $\vec{L}$, равный векторной сумме моментов импульса относительно той же точки всех материальных точек системы (малых элементов твёрдого тела):

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n}\left[\vec{r}_i, \vec{p}_i\right]. \tag{5}$$

Моментом импульса твёрдого тела относительно оси (например, *Z*) называют проекцию на эту ось вектора момента импульса тела относительно любой точки, выбранной на рассматриваемой оси. **Моментом силы относительно оси** называют проекцию на эту ось вектора момента силы относительно любой точки, находящейся на этой оси.

Уравнение динамики тела, вращающегося с угловой скоростью $\vec{\omega}$ **вокруг неподвижной оси** $\boldsymbol{Z}$, имеет вид

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z^{ВНЕШ} . \qquad (6)$$

Здесь $L_z = \sum m_i \cdot r_{iz}^2 \cdot \omega$**,** где r_{iz} – радиус окружности, по которой движется рассматриваемая материальная точка.

Моментом инерции механической системы относительно оси вращения $\boldsymbol{Z}$ **(моментом инерции твёрдого тела)** называют величину J_z, равную сумме произведений масс m_i всех материальных точек, образующих систему, на квадраты их расстояний r_{iz} от данной оси:

$$J_z = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot r_{iz}^2 . \qquad (7)$$

Для тела, масса которого непрерывно распределена по его объёму V, вычисление момента инерции проводится по формуле

$$J_z = \int_{(m)} r^2 dm = \int_{(V)} \rho \cdot r^2 dV . \qquad (8)$$

Если тело в процессе вращения не деформируется, то его момент инерции не изменяется и уравнение (6) можно представить следующим образом:

$$J_z \frac{d\omega}{dt} = M_z^{ВНЕШ} \qquad \text{или} \qquad J_z \frac{d^2\vartheta}{dt^2} = M_z^{ВНЕШ} . \qquad (9)$$

Момент инерции тела относительно оси является мерой **инертности тела** при его вращении относительно этой оси.

Теорема Штейнера: момент инерции J_z относительно произвольной оси $\boldsymbol{Z}$ равен сумме момента инерции J_c относительно параллельной ей оси Z_C, проходящей через центр масс C тела, и произведения массы тела m на квадрат расстояния d между этими осями:

$$J_z = J_c + md^2 . \qquad (10)$$

Гармонические колебания. Физический маятник

<u>Гармоническими</u> называют периодические колебания величины $\xi(t)$, если

$$\xi(t) = A\cdot\sin(\omega_0 t + \varphi_{01}) \qquad \text{или} \qquad \xi(t) = A\cdot\cos(\omega_0 t + \varphi_{02}) \text{ , (11)}$$

где $\varphi_{02} = \varphi_{01} - \pi/2$,

ω_0 − циклическая частота незатухающих гармонических колебаний,

$A = \xi_{MAX} = const > 0$ – амплитуда колебаний;

φ_0 – начальная фаза колебаний.

Первая и вторая производные по времени от гармонически колеблющейся величины $\xi(t)$ также совершают гармонические колебания той же частоты:

$$\frac{d\xi}{dt} = A\,\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_{01}) \text{ , } \frac{d^2\xi}{dt^2} = -A\omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \varphi_{01}). \text{ (12)}$$

Сравнивая значения $\xi(t)$ и $\frac{d^2\xi}{dt^2}$ видно, что гармонически колеблющаяся величина удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + \omega_0^2\xi = 0. \qquad (13)$$

<u>Физическая величина $\xi(t)$ совершает гармонические колебания в том и только в том случае, если она удовлетворяет дифференциальному уравнению гармонических колебаний</u>

$$a\frac{d^2\xi}{dt^2} + b\cdot\xi = 0 \text{ ,} \qquad \text{где} \qquad \frac{b}{a} = \omega_0^2. \qquad (14)$$

Физический маятник – твёрдое тело, которое может вращаться под действием своей силы тяжести *mg* вокруг неподвижной горизонтальной оси качания маятника *OZ*, не проходящей через центр масс тела *C* (рис. 1). Точку *O* пересечения оси качания маятника с вертикальной плоскостью, проходящей через центр масс маятника и перпендикулярной оси качания называют точкой подвеса маятника.

При отклонении маятника на угол θ сила тяжести создаёт момент, численно равный $mg\cdot d\cdot\sin\vartheta$ и стремящийся возвратить маятник в положение равновесия
(θ = 0).

Если силами трения в подвесе маятника можно пренебречь, то уравнение динамики вращательного движения твёрдого тела (9) примет вид:

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg \cdot d \cdot sin\theta \ , \tag{15}$$

где $d = |OC|$ – расстояние от центра масс маятника до оси качания;

J – момент инерции маятника относительно той же оси.

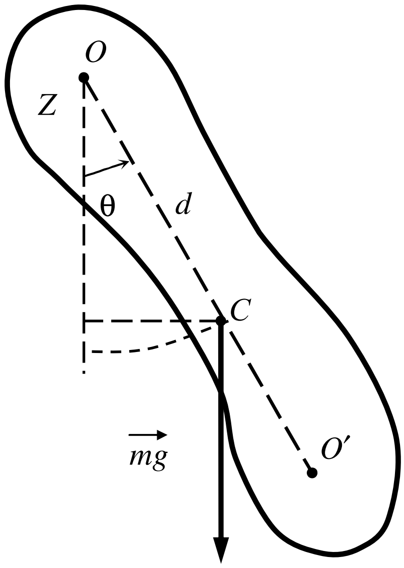

Рис. 1

При малых колебаниях $sin\theta \approx \theta$. Тогда

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2} + mg \cdot d \cdot \theta = 0 \tag{16}$$

и угол θ удовлетворяет дифференциальному уравнению гармонических колебаний

$$\theta = \theta_0 \, sin(\omega_o t + \phi_0),$$

где θ_0 – амплитуда колебаний угла θ;

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{J}} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgd}} \ . \tag{17}$$

Если колеблющееся твёрдое тело является материальной точкой массы m, подвешенной на невесомой нерастяжимой нити длиной $l_М$, то такой маятник называют **математическим.** В этом случае $J = ml_M^2$ и период математического маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l_M}{g}} \ . \tag{18}$$

Длину математического маятника, имеющего такой же период колебаний, что и рассматриваемый физический маятник, называют **приведённой длиной** $l_{ПР}$ этого **физического маятника**

$$l_{ПР} = \frac{J}{md} = d + \frac{J_C}{ml} > d\ . \qquad (19)$$

Точку O' (рис. 1), которая находится на прямой, проходящей через точку подвеса O и центр масс C, и отстоит от точки O на расстоянии $l_{ПР}$, называют **центром качания физического маятника.** Тогда

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l_{ПР}}{g}}\ . \qquad (20)$$

Если физический маятник перевернуть и заставить совершать малые колебания вокруг оси $O'Z$, то период колебаний не изменится. На этом свойстве основано определение **ускорения свободного падения** с помощью **оборотного маятника:** экспериментально устанавливают положения двух точек O и O', малые колебания вокруг которых происходят с одинаковым периодом. Определив $l_{ПР} = OO'$, из формулы (20) находим g.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

Описание экспериментальной установки

Внешний вид установки в сборе показан на рис. 2.

Рис. 2

С помощью двух струбцин к полке лабораторного стола крепятся два штативных стержня прямоугольного сечения. На стержнях прямоугольными зажимами закреплены два болта с резцами, являющимися осью качания маятника. Физический маятник (рис. 3) представляет из себя цилиндрический стержень из нержавеющей стали длиной 750 мм, на который устанавливаются две одинаковые цилиндрические металлические втулки 1 и 2 (втулка 1 маркируется одной точкой, а втулка 2 – двумя точками).

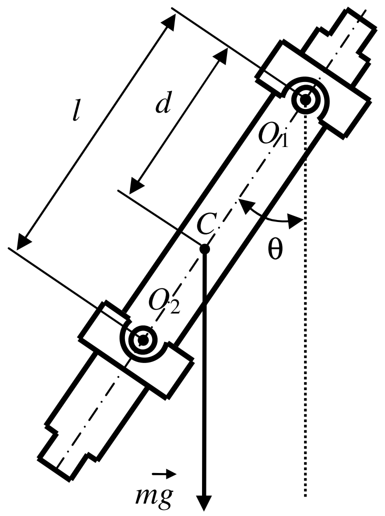

Рис. 3

Период малых колебаний маятника определяют с помощью светового барьера со счётчиком, закреплённого в штативе на треноге. Световой барьер, работающий в режиме измерения периода (переключатель сдвинут вправо) устанавливают в точке максимального отклонения маятника. В этом случае время, прошедшее между двумя последовательными положениями маятника в одинаковой фазе колебаний, регистрируется, когда маятник просто покидает инфракрасный луч.

Порядок выполнения эксперимента

1. Закрепить втулку 1 на стержне на расстоянии примерно 9 см от его конца. Втулку 2 закрепить на стержне на расстоянии 60 см от втулки 1. Положение втулки 1 в ходе эксперимента не меняется. Поместить маятник на ось качания.

2. Измерить период T_1, когда на оси качания находится втулка 1,

3. Маятник перевернуть так, чтобы на оси качания находилась втулка 2.

4. Определить период T_2 как функцию расстояния l между обеими точками подвеса O_1 и O_2 (втулкой 2 и втулкой 1, имеющей фиксированное положение на стержне маятника). Изменять расстояние l рекомендуется в диапазоне $34 \div 60$ см с дискретностью 2 см. Измерения расстояния l производятся при снятом с оси качания маятнике между осями винтов, затягивающих втулки на стержне маятника, с помощью рулетки с точностью не менее ± 1 мм. Полученные данные занести в таблицу 1.

Таблица 1

Длина l, см	60	58	56	54	52	50	48	46	44	42	40	38	36	34
Период T_2, с														

5. Построить график зависимости периода T_2 от длины l. Типичный вид такого графика приведён на рис. 4.

А) Симметричный случай: $T_1(l_a) = T_1(l_b)$

6. По графику для периода $T_2 = T_1$ определить $l_{ПР} = l_a \pm 3\ см$.

7. Используя формулу (20), рассчитать ускорение свободного падения

$$g = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 l_{ПР}. \tag{21}$$

8. Рассчитать погрешность измерения ускорения свободного падения по формуле

$$\Delta g = g\sqrt{\left(\frac{\Delta T^2}{T^2}\right)^2 + \left(\frac{\Delta l_{ПР}}{l_{ПР}}\right)^2}. \tag{22}$$

Результат измерения ускорения свободного падения представить в виде $g \pm \Delta g$.

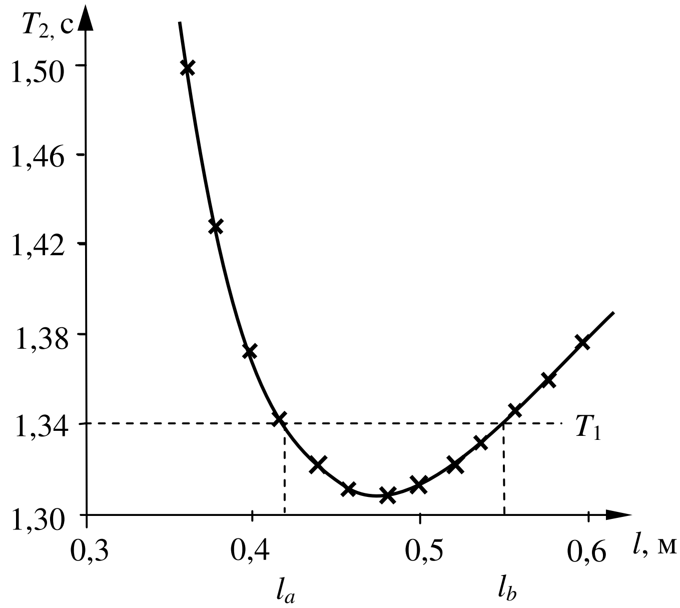

Рис. 4

Б) Асимметричный случай $T_1(l_a) \neq T_1(l_b)$

При определении $l_{ПР}$ и T по графику на рис. 4 не было принято во внимание изменение момента инерции и перенесение центра масс в результате смещения втулки 2, поддерживающей маятник на оси качания (тем не менее базовая модель остаётся неизменной). Эта ошибка становится очевидной при контрольном измерении периода T_1.

9. Перевернуть маятник так, чтобы на оси качания находилась втулка 1.

10. Определить период T_1 как функцию расстояния l так как определялась функция $T_2(l)$ в пункте 4, перемещая втулку 2 при фиксированном положении втулки 1. Полученные данные занести в табл. 2.

Таблица 2

Длина *l*, см	34	36	38	40	42	44	46	48	50					
Период T_1, с														

11. Построить на одном графике зависимости $T_2(l)$ и $T_1(l)$. Типичный вид такого графика приведён на рис. 5.

12. В точке пересечения зависимостей $T_2(l)$ и $T_1(l)$ на графике (рис. 5) определить период T и приведённую длину $l_{ПР} = l_a \pm 0{,}1$ (см) маятника.

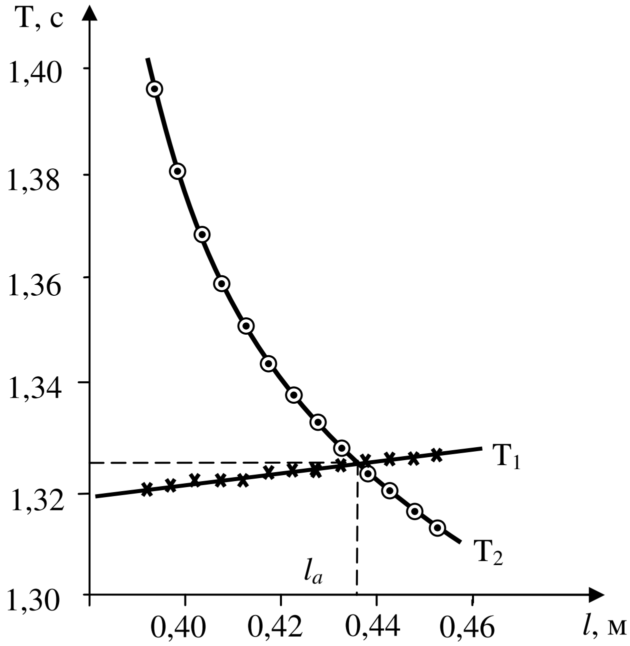

Рис. 5

13. Провести расчёты в соответствии с пунктами 7 и 8. Сравнить полученные результаты с табличным значением $g = 9{,}81$ м/с^2.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Запишите уравнение динамики тела, вращающегося с угловой скоростью ω вокруг неподвижной оси, и поясните физический смысл величин, входящих в это уравнение.

2. Какие колебания называют гармоническими? Запишите дифференциальное уравнение гармонического осциллятора.

3. Что называют приведённой длиной физического маятника? Выведете формулы для приведённой длины и периода малых незатухающих колебаний маятника в виде шара с массой $2m$ и радиуса R, закреплённого на одном конце жёсткого однородного стержня с массой $4m$ и длиной $4R$, другой конец которого шарнирно соединён с осью качания.

4. Каким свойством обладает центр качания физического маятника?

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Савельев И.В. Курс общей физики. В 5 томах. Том 1. Механика. С.-Пб: Лань, 2011. 448 с.

2. Иродов И.Е. Механика. Основные законы. М.:БИНОМ, 2009. 312 с.